Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales 201930
09 de septiembre de 2019
FILA A **Tiempo máximo: 90 minutos**.

Nombre completo: ______________________________ Código ______________________________

0) [Valor: 0.2] Seleccione marcando con una X. El grupo de Ecuaciones Diferenciales (cuyo horario de clase complementaria aparece en cada item) en el cual usted está matriculado es:

a) Grupo 04, Martes 4:30pm-5:30pm ( )
b) Grupo 05, Martes 5:30pm-6:30pm ( )
c) Grupo 06, Miércoles 2:30pm-3:30pm ( )

---

1) [Valor: 1.5] **Halle la solución del siguiente problema de valores iniciales (note que la EDO tiene coeficientes homogéneos, es decir, es una EDO homogénea).**

$$\begin{cases} (xy+y^2)dx - xydy = 0, \quad x > 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Solución: La ecuación diferencial en el P.V.I es equivalente a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{xy} = \frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}} + \frac{y^{\cancel{2}}}{x\cancel{y}} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Haciendo el cambio de variables $u = \dfrac{y}{x}$ o equivalentemente, $y = xu$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\cancel{u} + x\frac{du}{dx} = 1 + \cancel{u}.$$

Entonces,

$$x\frac{du}{dx} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad u = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Longrightarrow u = \ln(x) + C.$$

Luego, $\dfrac{y}{x} = \ln(x) + C \quad \Longrightarrow \quad y = x\big(\ln(x) + C\big)$. Evaluando la condición inicial se obtiene: $1 = 1 \cdot \big(\cancelto{0}{\ln(1)} + C\big) = C$. Por lo tanto $C = 1$ y la solución del P.V.I. está dada por $y = x\big(\ln(x) + 1\big)$.

---

2) [Valor: 1.5] **Halle la solución general de la siguiente ecuación diferencial y exprese dicha solución de manera explícita (es decir, en la forma $y(x) = \cdots$).**

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2y^2, \qquad x > 0.$$

Solución: Dividiendo la ecuación diferencial por x, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xy^2, \qquad x > 0. \qquad (*)$$

Esta es una ecuación de Bernoulli. Luego, hacemos el cambio de variables $u = y^{1-2} = y^{-1}$. Por lo tanto, $\dfrac{du}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$. Multiplicando la ecuación $(*)$ por $-y^{-2}$ tenemos:

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = -x$$

y teniendo en cuenta el cambio de variables, podemos escribir:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = -x, \quad x > 0. \qquad (**)$$

Esta última es una EDO lineal de primer orden. Calculamos un factor integrante:

$$e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x, \qquad \text{pues } x > 0.$$

Multiplicando por el factor integrante la ecuación $(**)$, obtenemos:

$$\underbrace{x\frac{du}{dx} + u}_{\frac{d}{dx}(xu)} = -x^2.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}(xu) = -x^2.$$

Integrando con respecto a x a ambos lados de esta última igualdad, tenemos:

$$xu = -\frac{x^3}{3} + C.$$

Luego,

$$u = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.$$

Regresando el cambio de variables:

$$y^{-1} = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}}$$

es la solución general explícita de la EDO original dada.

---

3) [Valor: 1.8] **Halle la solución general de la siguiente ecuación diferencial (puede dejar la solución en forma impícita).**

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(2x+\frac{1}{y}\right)dy=0, \qquad y>0.$$

Solución: Sean $\quad M(x,y)=y+\dfrac{1}{y} \quad$ y $\quad N(x,y)=2x+\dfrac{1}{y}$. Entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=1-\frac{1}{y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=2.$$

Entonces, $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ y por lo tanto la ecuación no es exacta. Buscamos un factor integrante:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-1-\dfrac{1}{y^2}}{2x+\dfrac{1}{y}} \quad \text{no es independiente de } \ y.$$

Por otro lado:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{1+\dfrac{1}{y^2}}{y+\dfrac{1}{y}}=\frac{\dfrac{\cancel{y^2+1}}{y^2}}{\dfrac{\cancel{y^2+1}}{y}}=\frac{\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}}=\frac{1}{y} \quad \text{es independiente de } \ x.$$

Luego, existe un factor integrante que depende solo de y dado por:

$$e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy}=e^{\int \frac{1}{y}\,dy}=e^{\ln y}=y.$$

Multiplicando la ecuación dada por este factor integrante, tenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$(y^2+1)dx+(2xy+1)dy=0.$$

Esta ecuación es exacta y por lo tanto existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2+1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy+1.$$

Entonces,

$$f(x,y)=\int(y^2+1)\,dx=(y^2+1)x+h(y)=xy^2+x+h(y).$$

Entonces, la igualdad $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy+1$ implica

$$\cancel{2xy}+h'(y)=\cancel{2xy}+1 \quad \Longrightarrow h'(y)=1 \quad \Longrightarrow \quad h(y)=y+C_1.$$

Luego, $f(x,y)=xy^2+x+y+C_1$. Por lo tanto, la solución (implícita) de la ecuación propuesta está dada por

$$f(x,y)=C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad xy^2+x+y+C_1=C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad xy^2+x+y=C.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales 201930
09 de septiembre de 2019
FILA B **Tiempo máximo: 90 minutos**.

Nombre completo: ____________________ Código ____________________

0) [Valor: 0.2] Seleccione marcando con una X. El grupo de Ecuaciones Diferenciales (cuyo horario de clase complementaria aparece en cada item) en el cual usted está matriculado es:

a) Grupo 04, Martes 4:30pm-5:30pm ( )
b) Grupo 05, Martes 5:30pm-6:30pm ( )
c) Grupo 06, Miércoles 2:30pm-3:30pm ( )

---

1) [Valor: 1.5] **Halle la solución del siguiente problema de valores iniciales (note que la EDO tiene coeficientes homogéneos, es decir, es una EDO homogénea).**

$$\begin{cases} (xy - y^2)dx + xydy = 0, \quad x > 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Solución: La ecuación diferencial en el P.V.I es equivalente a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy}{xy} = \frac{y^{\cancel{2}}}{x\cancel{y}} - \frac{\cancel{xy}}{\cancel{xy}} = \frac{y}{x} - 1.$$

Haciendo el cambio de variables $u = \dfrac{y}{x}$ o equivalentemente, $y = xu$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\cancel{u} + x\frac{du}{dx} = \cancel{u} - 1.$$

Entonces,

$$x\frac{du}{dx} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad u = -\int \frac{1}{x}\,dx \quad \Longrightarrow u = -\ln(x) + C.$$

Luego, $\dfrac{y}{x} = -\ln(x) + C \quad \Longrightarrow \quad y = x\big(-\ln(x) + C\big)$. Evaluando la condición inicial se obtiene: $0 = 1 \cdot \big(-\cancelto{0}{\ln(1)} + C\big) = C$. Por lo tanto $C = 0$ y la solución del P.V.I. está dada por $y = -x\ln(x)$.

---

2) [Valor: 1.5] **Halle la solución general de la siguiente ecuación diferencial y exprese dicha solución de manera explícita (es decir, en la forma $y(x) = \cdots$).**

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2, \qquad x > 0.$$

Solución: Dividiendo la ecuación diferencial por x, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2, \qquad x > 0. \qquad (*)$$

Esta es una ecuación de Bernoulli. Luego, hacemos el cambio de variables $u = y^{1-2} = y^{-1}$. Por lo tanto, $\dfrac{du}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$. Multiplicando la ecuación $(*)$ por $-y^{-2}$ tenemos:

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -x$$

y teniendo en cuenta el cambio de variables, podemos escribir:

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x, \quad x > 0. \qquad (**)$$

Esta última es una EDO lineal de primer orden. Calculamos un factor integrante:

$$e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}, \qquad \text{pues } x > 0.$$

Multiplicando por el factor integrante la ecuación $(**)$, obtenemos:

$$\underbrace{\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}u}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right)} = -1.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right) = -1.$$

Integrando con respecto a x a ambos lados de esta última igualdad, tenemos:

$$\frac{1}{x}u = -x + C.$$

Luego,

$$u = -x^2 + Cx.$$

Regresando el cambio de variables:

$$y^{-1} = -x^2 + Cx.$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{1}{-x^2 + Cx}$$

es la solución general explícita de la EDO original dada.

---

3) [Valor: 1.8] **Halle la solución general de la siguiente ecuación diferencial (puede dejar la solución en forma impícita).**

$$\Big(2y+\frac{1}{x}\Big)dx+\Big(x+\frac{1}{x}\Big)dy=0, \qquad x>0.$$

Solución: Sean $M(x,y)=2y+\dfrac{1}{x}$ y $N(x,y)=x+\dfrac{1}{x}$. Entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=1-\frac{1}{x^2}.$$

Entonces, $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ y por lo tanto la ecuación no es exacta. Buscamos un factor integrante:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{\cancel{x^2+1}}{x^2}}{\dfrac{\cancel{x^2+1}}{x}}=\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\frac{1}{x} \quad \text{es independiente de } y.$$

Luego, existe un factor integrante que depende solo de x dado por:

$$e^{\displaystyle\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx}=e^{\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx}=e^{\ln x}=x.$$

Multiplicando la ecuación dada por este factor integrante, tenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$(2xy+1)dx+(x^2+1)dy=0.$$

Esta ecuación es exacta y por lo tanto existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+1.$$

Entonces,

$$f(x,y)=\int(2xy+1)\,dx=x^2y+x+h(y).$$

Entonces, la igualdad $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+1$ implica

$$\cancel{x^2}+h'(y)=\cancel{x^2}+1 \quad \Longrightarrow h'(y)=1 \quad \Longrightarrow \quad h(y)=y+C_1.$$

Luego, $f(x,y)=x^2y+x+y+C_1$. Por lo tanto, la solución (implícita) de la ecuación propuesta está dada por

$$f(x,y)=C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2y+x+y+C_1=C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2y+x+y=C.$$