1 ECUACIONES ALGEBRAÍCAS

Una ecuación es una expresión de la forma $a = b$ donde tanto a como b son expresiones de caracter algebraíco y al menos en una de ellas hay uno más términos deconocidos.

Ejemplo 1 $3x + 17 = 21$, $\frac{x+6}{11} = \frac{2x-4}{x+1}$, $x + y + z = 6$, $4x^3 - 7x + 5 = 2x^2 + 3$, $\sqrt{x+5} = x - 1$.

1.1 Tipos de ecuaciones

Las ecuaciones en donde los términos desconocidos se encuentran combinados con expresiones conocidas mediante adiciones, multiplicaciones, exponentes o radicales son ecuaciones algebraícas: $3x + 17 = 21$, $\frac{x+6}{11} = \frac{2x-4}{x+1}$, $x + y + z = 6$, $4x^3 - 7x + 5 = 2x^2 + 3$, $\sqrt{x+5} = x - 1$.

Hay ecuaciones trigonométricas, en donde sobre los términos desconocidos se aplican expresiones de caracter trigonométrico: $\cos x + \tan x = 2$, $\frac{2}{1-\sin x} = \sec x$.También hay ecuaciones de caracter exponencial o logarítmico: $2^x + 1 = 5, \log_2 (x+3) = -1$

1.2 Solución de ecuaciones

Solucionar una ecuación implica determinar los valores de los términos desconocidos para los cuales la expresión $a = b$ resulta verdadera. Es necesario conocer el conjunto de referencia con el cual se está trabajando, la ecuación $5x + 6 = 2$ no tiene solución si el conjunto de referencia es el conjunto de los números naturales, o el de los números enteros: no hay ningún número natural o entero que multiplicado por cinco y sumado con seis, dé como resultado dos. Por el contrario, si el conjunto de referencia es el conjunto de los números racionales o de los reales, la ecuación tiene solución: $x = \frac{-4}{5} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Mientras no se diga lo contrario, el conjunto de referencia será el conjunto de los números reales.

La ecuación algebraíca más simple es la ecuación de primer grado con una incognita, es una ecuación que tiene la estructura $ax + b = c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Para solucionar una ecuación de este tipo se hacen uso de las propiedades que hacen del conjunto de los números reales un cuerpo:

$ax + b = c \Rightarrow ax + b + (-b) = c + (-b)$ por que la propiedad uniforme con relación a la adición me permite sumar una misma cantidad a ambos términos de una igualdad sin que ésta se altere. $ax + (b + (-b)) = c + (-b) \Rightarrow ax + 0 = c - b$ ya que todo número real tiene un inverso aditivo y la suma de un número con su inverso es cero, $ax + 0 = c - b \Rightarrow ax = c - b$ porque la propiedad modulativa de la adición así lo permite, $a^{-1}ax = a^{-1}(c - b)$ gracias a que la propiedad uniforme con relación a la multiplicación permite multiplicar por una misma cantidad ambos términos de una igualdad sin que ésta se altere. $1x = a^{-1}(c - b)$ porque al multiplicar un número por su inverso multiplicativo el resultado es 1. $1x = a^{-1}(c - b) \Rightarrow x = a^{-1}(c - b)$ por ser el 1 el módulo de la multiplicación.

Resumiendo:

$$\begin{aligned}
ax+b &= c \\
ax+b+(-b) &= c+(-b) \\
ax+(b+(-b)) &= c+(-b) \\
ax+0 &= c-b \\
ax &= c-b \\
a^{-1}ax &= a^{-1}(c-b) \\
1x &= a^{-1}(c-b) \\
x &= a^{-1}(c-b)
\end{aligned}$$

No siempre una ecuación de primer grado está escrita explicítamente en la forma $ax+b=c$, para determinar su solución se requiere un previo proceso algebraíco de simplificación .

Ejemplo 2 $\dfrac{2}{z+1}+\dfrac{3}{2z-3}=\dfrac{6z+1}{2z^2-z-3}$ *factorizemos el denominador del término de la derecha:* $\dfrac{2}{z+1}+\dfrac{3}{2z-3}=\dfrac{6z+1}{(z+1)(2z-3)}$ *al encontrar denominadores distintos es necesario reducir todas las expresiones a un denominador común, el cual en este caso es* $(z+1)(2z-3) \Rightarrow \dfrac{2}{z+1}+\dfrac{3}{2z-3}=\dfrac{6z+1}{(z+1)(2z-3)}$ *se transforma en:*

$$\frac{2(2z-3)}{(z+1)(2z-3)}+\frac{3(z+1)}{(2z-3)(z+1)}=\frac{6z+1}{(z+1)(2z-3)}$$

cuando todos los términos tienen el mismo denominador, siempre y cuando sea distinto de cero, este se puede eliminar, gracias a la propiedad uniforme, en este caso obtenemos:

$$\begin{aligned}
2(2z-3)+3(z+1) &= 6z+1 \Rightarrow \\
4z-6+3z+3 &= 6z+1 \Rightarrow \\
7z-3 &= 6z+1 \Rightarrow z=4.
\end{aligned}$$

1.3 La Ecuación de segundo grado

Toda expresión de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$, es una ecuación de segundo grado con una incognita, resolver una ecuación de este tipo, en el conjunto de los números reales, que es el conjunto de referencia, implica encontrar números reales que cumplan la condición dada.

Para encontrar una solución vamos a emplear las propiedades de los números reales, mencionadas anteriormente:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 \Rightarrow \\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0 \Rightarrow \\
x^2+\frac{b}{a}x &= 0-\frac{c}{a} \Rightarrow \\
x^2+2\frac{b}{2a}x &= -\frac{c}{a} \Rightarrow \\
x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \Rightarrow \\
x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow \\
x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad (1)
\end{aligned}$$

El lado izquierdo de (1) es un trinomio cuadrado perfecto, el cual se factoriza como: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow \\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad (2)
\end{aligned}$$

el lado derecho de (2) es un número real sólo si $b^2-4ac \geq 0$, en el caso de que así sea, se tendría entonces:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow \\
x &= \frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

y un valor de x sería $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y el otro valor sería $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ esto es, el conjunto solución es $\left\{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

Ejemplo 3 $\dfrac{x+7}{(2x-3)(x+1)} = \dfrac{8x-9}{2x-3} - \dfrac{4x-9}{x+2}$ *al encontrar denominadores distintos es necesario reducir todas las expresiones a un denominador común,* *el cual en este caso es* $(2x-3)(x+1)(x+2) \Rightarrow \dfrac{x+7}{(2x-3)(x+1)} = \dfrac{8x-9}{2x-3} - \dfrac{4x-9}{x+2}$ *se transforma en:*

$$\begin{aligned} \frac{(x+7)(x+2)}{(2x-3)(x+1)(x+2)} &= \frac{(8x-9)(x+1)(x+2)}{(2x-3)(x+2)(x+1)} - \frac{(4x-9)(2x-3)(x+1)}{(x+2)(2x-3)(x+1)} \Rightarrow \\ (x+7)(x+2) &= (8x-9)(x+1)(x+2) - (4x-9)(2x-3)(x+1) \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 + 9x + 14 = 37x^2 - 8x - 45 \Rightarrow 36x^2 - 17x - 59 = 0$$

en este caso $a = 36, b = -17, c = -59$ *y* x *sería igual a*

$$\begin{aligned} & \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(36)(-59)}}{2(36)} \\ = \quad & \frac{17 \pm \sqrt{289 + 8496}}{72} = \frac{17 \pm \sqrt{8785}}{72} = \frac{17 \pm 93.728}{72} \end{aligned}$$

entonces un valor de x *sería* $\frac{110.728}{72} = 1.5379$ *y el otro sería* $\frac{-76.728}{72} = -1.0657$

Ejemplo 4 $\dfrac{x+2}{x-2} - 3 - 4\dfrac{x-2}{x+2} = 0$ *comenzamos buscando un denominador común:*

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{4(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} &= 0 \Rightarrow \\ (x+2)(x+2) - 3(x-2)(x+2) - 4(x-2)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

pero $(x+2)(x+2) - 3(x-2)(x+2) - 4(x-2)(x-2) =$

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 12 - 4x^2 + 16x - 4 \\ = \quad & 20x - 6x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 20x - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x(10 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \ x = \frac{10}{3}$$

1.4 Ecuaciones que pueden transformarse en cuadráticas

Una ecuación de la forma $a(y^n)^2 + by^n + c$ se puede transformar en una ecuación cuadrática haciendo la sustitución $x = y^n$

Ejemplo 5 $4x^{-4} - 7x^{-2} - 36 = 0$ *esta ecuación es equivalente a* $4\left(x^{-2}\right)^2 - 7\left(x^{-2}\right) - 36 = 0$ *haciendo* $x^{-2} = y$ *se tiene* $4(y)^2 - 7(y) - 36 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{8} = \dfrac{7 \pm \sqrt{625}}{8} = \dfrac{7 \pm 25}{8}$ *los valores de* y *serían* 4 *y* $\frac{-9}{4}$ *entonces*

$x^{-2} = 4 \vee\ x^{-2} = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left(x^{-2}\right)^{-1} = 4^{-1} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \vee\ \left(x^{-2}\right)^{-1} = \left(\frac{-9}{4}\right)^{-1} \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{9}$, *la solución* $x^2 = \frac{-4}{9}$ *debe descartarse porque al ser* x *un número real, no es posible que al elevarlo al cuadrado de como resultado un número negativo, luego nos queda* $x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$ *luego el conjunto solución es* $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$

Ejemplo 6 $\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^2 - 4.\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right) + 3 = 0$ *haciendo* $y = \dfrac{x-2}{3x+1}$ *se obtiene* $y^2 - 4y + 3 = 0$ *el lado izquierdo de esta ecuación se factoriza como* $(y-3)(y-1)$ *con lo cual obtenemos* $(y-3)(y-1) = 0$ *el producto de dos números es cero si al menos uno de ellos lo es, por tanto* $y = 3 \vee\ y = 1 \Rightarrow 3 = \dfrac{x-2}{3x+1} \vee 1 = \dfrac{x-2}{3x+1}$
Resolviendo cada una de estas dos ecuaciones se tiene $x = \frac{-5}{8} \vee x = \frac{-3}{2}$

1.4.1 Ecuaciones con radicales

Una ecuación en donde la variable se encuentre en el interior de un radical recibe el nombre de ecuación con radicales, el proceso para resolver una ecuación de tal tipo consiste en eliminar el radical elevando la expresión a la potencia necesaria, en particular, si se trata de un radical cuadrático se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación, con el fin de eliminar los radicales. Una vez se han eliminado los radicales se resuelve la ecuación empleando los procesos indicados, de acuerdo al tipo de expresión resultante. cuando se ha encontrado el conjunto solución es necesario comprobar cada uno de los elementos del conjunto en la ecuación original ya que al elevar al cuadrado se pueden introducir soluciones extrañas como consecuencia del hecho que un número real a y su inverso aditivo, $-a$, tienen el mismo cuadrado, a^2.

Ejemplo 7 $\sqrt{x+2} = 3x - 4 \Rightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (3x-4)^2 \Rightarrow x + 2 = 9x^2 - 24x + 16 \Rightarrow 9x^2 - 25x + 14 = 0$ *usando la fórmula general obtenemos:* $x = \dfrac{25 \pm \sqrt{625 - 504}}{18} = \dfrac{25 \pm \sqrt{121}}{18} = \dfrac{25 \pm 11}{18} \Rightarrow x = \dfrac{36}{18} = 2 \vee\ x = \dfrac{14}{18} = \frac{7}{9}$
verificando estas soluciones en la ecuación original se tiene: $\sqrt{2+2} = 2 \wedge 3 \times 2 - 4 = 2$ *esta solución es válida, probando la otra solución se llega a* $\sqrt{\frac{7}{9} + 2} = \frac{5}{3} \wedge 3 \times \frac{7}{9} - 4 = \frac{-5}{3}$ *como* $\frac{5}{3} \neq \frac{-5}{3}$ *la solución* $x = \frac{7}{9}$ *no es válida y por tanto se descarta.*

Ejemplo 8 $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{5x+9}\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{5x+9}\right)^2\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{3x+4}+3x+4 &= 5x+9\\
4x+5+2\sqrt{(x+1)(3x+4)} &= 5x+9\\
2\sqrt{(x+1)(3x+4)} &= x+4\\
\left(2\sqrt{(x+1)(3x+4)}\right)^2 &= (x+4)^2\\
4(x+1)(3x+4) &= (x+4)^2\\
12x^2+28x+16 &= x^2+8x+16\\
11x^2+20x &= 0\\
x(11x+20) &= 0\\
x &= 0\vee x=\frac{-20}{11}
\end{aligned}$$

Verificamos las soluciones: $\sqrt{0+1}+\sqrt{3\times 0+4}=1+2=3\wedge\ \sqrt{5\times 0+9}=3$, 0 *es una solución válida, del hecho que se descarta como solución* $\frac{-20}{11}$ *porque* $\sqrt{\frac{-20}{11}+1}$, $\sqrt{3\times\frac{-20}{11}+4}$ *y* $\sqrt{5\times\frac{-20}{11}+9}$*no son números reales.*

1. **Ejercicio 9** *Resuelva las siguientes ecuaciones:*

   (a) $\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+1}+2$

   (b) $\sqrt{3x+1}+1=\sqrt{4x+5}$

   (c) $\dfrac{x+3}{x+1}-5-4\dfrac{x+1}{x+3}=0$

   (d) $\sqrt{3x+12}-1=\sqrt{5x+9}$

   (e) $\dfrac{2x-3}{x-4}-7+6\dfrac{x-4}{2x-3}=0$

   (f) $\sqrt{3x+12}-3=\sqrt{5x+1}$

   (g) $\dfrac{3x+2}{2x-1}-10+9\dfrac{2x-1}{3x+2}=0$

   (h) $\sqrt{2x+1}-7=\sqrt{x+1}$

   (i) $\dfrac{x+2}{2x+1}-8+5\dfrac{2x+1}{x+2}=0$

   (j) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+4}-5$

   (k) $\dfrac{3x+2}{x-1}+1+2\dfrac{x-1}{3x+2}=0$

   (l) $\sqrt{2x+7}=\sqrt{x-5}-2$

   (m) $\dfrac{3x-2}{x-1}+1+3\dfrac{x-1}{3x-2}=0$

2. Encuentre una ecuación cuadrática que tenga por raices:

(a) $5-\sqrt{2}$ y $5+\sqrt{2}$

1. (a) $1-\sqrt{3}$ y $1+\sqrt{3}$
   (b) $1-\sqrt{7}$ y $1+\sqrt{7}$
   (c) $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$

Ejercicio 10 *Resuelva los siguientes problemas*

1. (a) Un automovil tiene un rendimiento de 32Km/gal de gasolina, cuando no se usa el aire acondicionado y de 26Km/gal cuando se usa. Si se usaron 91 galones de gasolina para viajar 2626Km, ¿a lo largo de cuántos Km se usó el acondicionador de aire?

   (b) Dos estudiantes A y B trabajan durante el verano, ganando cada uno \$20 000 diarios, después de cierto tiempo a B se le dieron más responsabilidades comenzando a ganar \$25 000 por día, si trabajaron un total de 65 dias y entre los dos recibieron un total de \$2 775 000 ¿Durante cuántos dias trabajó B ganando el salario mayor?

   (c) Se tienen \$133 000 en billetes de \$2 000, \$5 000 y \$10 000. Si el número de billetes de \$2 000 es el doble de los de \$10 000 y el número de billetes de \$5 000 es igual a la cantidad de billetes de \$2 000 y \$10 000, juntos, ¿Cuántos billetes hay de cada denominación?

   (d) Dos hermanos se turnan para lavar el auto de la familia en los fines de semana. Uno de ellos emplea 45 min en hacerlo, el otro sólo 30min. Un día en que tenían prisa por llegar al estadio decidieron hacer el trabajo en forma conjunta. ¿En cuánto tiempo lo hicieron?

   (e) En una evento al que asistieron 11 000 personas se recaudó un total de \$79 000 000. Si las entradas tenían un costo de \$5 000 y \$8 000, ¿cuántas personas entraron en cada localidad?

   (f) ¿Cuánta azucar de \$500 por libra se deberá mezclar con 60 libras de a \$400 por libra para obtener una mezcla especial que se pueda vender a \$440 la libra?

   (g) Si se instala aislamiento térmico en una casa, los costos de enfriamiento disminuirían en un 15%. ¿En que tiempo se recupera la inversión si el costo del aislamiento es de \$1 440 000 y los costos que representa el tener el aire acondicionado en funcionamiento es de \$160 000 mensuales?

   (h) Se rentan dos apartamentos, que producen un ingreso de \$8 100 000 anuales. Calcular la renta mensual que se cobra por cada uno, si uno de ellos es \$150 000 más caro que el otro y el más caro estuvo vacante durante dos meses.

   (i) Carlos decidió invertir 1560 unidades monetarias en acciones, cuando el precio de cada acción había aumentado en 24 unidades monetarias vendió en 1520 unidades monetarias sus acciones, excepto 10 de ellas, ¿Cuántas acciones había comprado?

(j) Una función de demanda $D(x)$ da el precio unitario al cual se pueden vender x cantidad de artículos, una función de ventas $R(x) = x{\cdot}D(x)$ da la cantidad de dinero recibido si se venden x articulos. La función de costo $C(x)$ representa el costo total de producir x artículos, la ganancia es $P(x) = R(x) - C(x)$. ¿Qué valor de x hace que la ganacia sea 6 si $D(x) = 20 - 2x$ y $C(x) = 10x + 3$.