

Universidad del Norte  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Examen final de Cálculo 3

# A

## Instrucciones generales:

1. Durante el examen no está permitido:
  - Hablar con sus compañeros.
  - Prestar algún material a sus compañeros.
  - El uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico.
  - El uso de notas de clases, textos, ni aparatos electrónicos.
2. El uso o posesión de celulares o calculadoras es causal de anulación.
3. El tiempo máximo para realizar el examen es de 90 minutos.

### Problema 1

(13 Puntos) Considere el campo vectorial

$$F(x, y, z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$$

Determine el flujo de  $F$  hacia afuera de la superficie del cubo limitado en el primer octante por los planos  $x = 1$ ,  $y = 1$  y  $z = 1$ .

### Problema 2

(13 Puntos) Considere el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x + y^2)\hat{i} + (y + z^2)\hat{j} + (z + x^2)\hat{k}.$$

Sea  $C$  el triángulo con vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  recorrido en sentido anti-horario cuando el camino cerrado es visto desde el eje  $z$  positivo. Calcule

$$\int_C F \cdot dr.$$

### Problema 3

(12 Puntos) Considere el campo vectorial (de fuerzas)

$$F(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{j} + \hat{k}.$$

Halle el trabajo realizado por el campo  $F$  al mover un cuerpo desde el punto  $(0, 1, 3)$  hasta el punto  $(\sqrt{\frac{e}{2}}, \sqrt{\frac{e}{2}}, 5)$ .

### Problema 4

(12 Puntos) Demuestre que el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

está dada por  $\pi ab$ .

**Sugerencia:** Use el teorema de Green y la parametrización  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .