Solución del examen final de Cálculo III.

A

Fecha: 22 de noviembre de 2017.

I. (10 puntos: 5 si plantea bien la integral y 5 si la resuelve correctamente) Utilizar el **teorema de Green** para evaluar la integral de línea:

$$\int_c (\cos y)dx + (xy - x\sin y)dy$$

C : Frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.

Solución.

En este caso $M(x,y) = \cos y$ y $N(x,y) = xy - x\sin y$. Por tanto, $\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = y - \sin y$. Aplicando el teorema de Green $\oint_c \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_c M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA =$

$$\iint_R [(y - \sin x\cos y) - (-\sin x \sin y)]\, dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} ydydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{12}.$$

II. (10 puntos: 5 si plantea bien la integral y 5 si la resuelve correctamente) Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ a través de la superficie S, esto es:

$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N} dS$$

Donde $\vec{N}$ es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba. $S: \quad z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$.

Solución.

En este caso $G(x,y,z) = z - g(x,y) = x^2 + y^2 + z - 9$, por tanto, $\vec{\nabla} G(x,y,z) = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + \hat{k}$. Sustituyendo se tiene:

$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N} dS = \iint_R \vec{F} \bullet \vec{\nabla} G(x,y,z) dA = \iint_R \left[2x^2 + 2y^2 + z\right] dA = \iint_R \left[2x^2 + 2y^2 + (9 - x^2 - y^2)\right] dA$$

$= \iint_R \left[x^2 + y^2 + 9\right] dA$. Cambiando a coordenadas polares se tiene que $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. De donde

$$\iint_R \left[x^2 + y^2 + 9\right] dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left(r^2 + 9\right) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{9r^2}{2}\right)\Big|_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right) d\theta = \frac{243\pi}{2}.$$

III. (15 puntos: 5 si calcula la divergencia y 10 si resuelve correctamente la integral) Utilizar el **teorema de la divergencia** para hallar el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = x^3\hat{\imath} + x^2y\hat{\jmath} + x^2e^y\hat{k}$ dirigido hacia el exterior, a través de la superficie del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones. $S: \quad z = 4-y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0.$

Solución.

Cálculo de la divergencia: $div\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \bullet \vec{F}(x,y,z) = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} = 4x^2.$

Por el **teorema de la divergencia**:

$$\iint\limits_S \vec{F} \bullet \vec{N} dS = \iiint\limits_Q div\vec{F} dV = \iiint\limits_Q 4x^2 dV = \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{4-y} 4x^2 dzdydx = \int_0^6 \int_0^4 4x^2(4-y)dydx$$

$$= \int_0^6 32x^2 dx = 2304.$$

IV. (15 puntos) Considerando el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{\imath} + (x^2 - y)\hat{\jmath}$.

a) (5 puntos) Determine si el campo $\vec{F}(x,y)$ es conservativo.

Solución.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$. Dado que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ se concluye que el campo es conservativo.

b) (5 puntos) Si $\vec{F}(x,y)$ resulta conservativo halle una función de potencial. En caso contrario indique que no aplica.

Solución.

Por ser $\vec{F}(x,y)$ conservativo, se cumple que $\vec{F}(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y)$. De ahí que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y$. Integrando la primera con respecto a x se tiene que $f(x,y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$. Derivando esta expresión con relación a "y"se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$. Igualando expresiones se tiene $x^2 + g'(y) = x^2 - y$, es decir, $g'(y) = -y$. Integrando esta expresión con respecto a "y"se obtiene $g(y) = -\frac{y^2}{2} + c$. Por tanto una expresión para el potencial es:

$$f(x,y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + c$$

c) (5 puntos) Halle el trabajo $W = \displaystyle\int_c \vec{F} \bullet d\vec{r}$ realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y)$ al desplazar un objeto desde el punto $(1,2)$ hasta el punto $(3,1)$.

Solución.

Por ser $\vec{F}(x,y)$ conservativo, el trabajo no depende de la trayectoria, sólo de los puntos inicial y final, por tanto, utilizando la función de potencial se tiene:

$$W = \int_c \vec{F} \bullet d\vec{r} = f(3,1) - f(1,2) = \frac{17}{2}.$$