Examen final de calculo III

Noviembre 23 2015

Nombre______________________________________AAAAA

Instrucciones. Lea el cuestionario con cuidado y responda todas las preguntas en la hoja cuadriculada asignada. Durante el examen no está permitido:

- Hablar con sus compañeros.
- Prestar algun material a sus compañeros.
- El uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico, notas de clase, textos, ni aparatos electrónicos.
- El uso o posesión de un celular.

Infringir cualquiera de estas normas es causal de anulación del examen.
Tiempo máximo 70 minutos.

1. (12 puntos). Calcular
$$\int_C \left(3x^2 + y\right) dx + 4xydy$$
Donde C es la frontera de la region comprendida entre las graficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$

2. (13 puntos). Calcular el trabajo que realiza la fuerza $F = z^2\widehat{\mathbf{i}}+y\widehat{\mathbf{j}}+x\widehat{\mathbf{k}}$ al mover un objeto en el sentido contrario a las manecillas del reloj siguiendo la curva intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z + y = 2$. (Sugerencia: Utilizar el teorema de Stokes)

3. (13 puntos). Calcular
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$
Donde $F = (2xz + \sin y)\,\widehat{\mathbf{i}} + (x \cos y)\,\widehat{\mathbf{j}} + x^2\widehat{\mathbf{k}}$ y C es la curva $r(t) = \cos t\widehat{\mathbf{i}} + \sin t\widehat{\mathbf{j}} + t\widehat{\mathbf{k}}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

4. (12 puntos). Sea S la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = x\widehat{\mathbf{i}} + y\widehat{\mathbf{j}} + (z+1)\,\widehat{\mathbf{k}}$ dirigido hacia afuera a travez de la semiesfera S.

   (Recuerde que el flujo viene dado por la integral $\displaystyle\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$)

Examen final de calculo III

Noviembre 23 2015

Nombre_____________________________________BBBBB

Instrucciones. Lea el cuestionario con cuidado y responda todas las preguntas en la hoja cuadriculada asignada. Durante el examen no está permitido:

- Hablar con sus compañeros.
- Prestar algun material a sus compañeros.
- El uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico, notas de clase, textos, ni aparatos electrónicos.
- El uso o posesión de un celular.

Infringir cualquiera de estas normas es causal de anulación del examen.
Tiempo máximo 70 minutos.

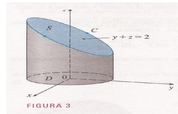
1. (12 puntos). Calcular
$$\int_C 4xy\,dx + \left(3x^2 + y\right) dy$$
Donde C es la frontera de la region comprendida entre las graficas de $y = x^2$, $y = 9$ y $x = 0$

2. (13 puntos). Calcular el trabajo que realiza la fuerza $F = z^2\widehat{\mathbf{i}}+y^2\widehat{\mathbf{j}}+x^2\widehat{\mathbf{k}}$ al mover un objeto en el sentido contrario a las manecillas del reloj siguiendo la curva intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z + y = 4$. (Sugerencia: Utilizar el teorema de Stokes)

3. (13 puntos). Calcular
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$
Donde $F = (2xz + \sin y)\,\widehat{\mathbf{i}} + (x\cos y)\,\widehat{\mathbf{j}} + x^2\widehat{\mathbf{k}}$ y C es la curva $r(t) = \cos t\widehat{\mathbf{i}} + \sin t\widehat{\mathbf{j}} + t\widehat{\mathbf{k}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

4. (12 puntos). Sea S la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = x\widehat{\mathbf{i}} + y\widehat{\mathbf{j}} + (z+2)\,\widehat{\mathbf{k}}$ dirigido hacia afuera a travez de la semiesfera S.

   (Recuerde que el flujo viene dado por la integral $\displaystyle\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$)

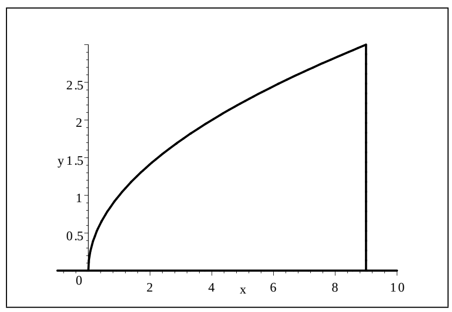


Solucion del Examen final de calculo III

Noviembre 23 2015

Solucion:

1. (12 puntos). Calcular
$$\int_C \left(3x^2 + y\right) dx + 4xydy$$
Donde C es la frontera de la region comprendida entre las graficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$
Sol: Graficando y Aplicando el teorema de Green tenemos que:



$$\int_C \left(3x^2 + y\right) dx + 4xydy = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} (4y - 1)\, dydx = 63$$

2. (13 puntos). Calcular el trabajo que realiza la fuerza $F = z^2\widehat{\mathbf{i}} + y\widehat{\mathbf{j}} + x\widehat{\mathbf{k}}$ al mover un objeto en el sentido contrario a las manecillas del reloj siguiendo la curva intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z + y = 2$. (Sugerencia: Utilizar el teorema de Stokes).
Sol a): Aplicando e teorema de Stokes tenemos: Calculado el rotacional de F tenemos que $\operatorname{curl} F = (0, 2z - 1, 0)$.
$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int\int \operatorname{curl} F \cdot \mathbf{dS} = \iint_R (0, 2z - 1, 0) \cdot (0, 1, 1)\, dA = \iint_R (2z - 1)\, dA \\ &= \iint_R (2(2 - y) - 1)\, dA = \iint_R (3 - 2y)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3 - 2r\sin\theta)\, rdrd\theta = 3\pi \end{aligned}$$
Sol b). También es posible calcular directamente la integral de linea utilizando la parametrización $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2 - \sin t$ $0 \le t \le 2\pi$.
$$\int_0^{2\pi} \left((2 - \sin t)^2 (-\sin t) + (\sin t)(\cos t) + (\cos t)(-\cos t)\right) dt = 3\pi$$

3. (13 puntos). Calcular

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$$

Donde $F=(2xz+\sin y)\,\widehat{\mathbf{i}}+(x\cos y)\,\widehat{\mathbf{j}}+x^2\widehat{\mathbf{k}}$ y C es la curva $r(t)=\cos t\widehat{\mathbf{i}}+\sin t\widehat{\mathbf{j}}+t\widehat{\mathbf{k}},\quad 0\leq t\leq 4\pi$

Sol a): El rotacional de F es cero, entonces el campo es conservativo y el trabajo no depende de la trayectoria, por la tanto podemos buscar una funcion potencial ϕ, tal que $\nabla\phi=F$, entonces

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xz+\sin y,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=x\cos y,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=x^2$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $\phi(x,y,z)=x^2z+x\sin y$.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=\int_C \boldsymbol{\nabla\phi}\cdot\mathbf{dr}=\boldsymbol{\phi}(1,0,4\pi)-\boldsymbol{\phi}(1,0,0)=4\pi$$

Sol b): Como el campo es conservativo se puede tomar una trayectoria alternativa que una los puntos $(1,0,0)$ y $(1,0,4\pi)$, por ejemplo la linea recta $x=1,\ y=0,\quad z=4\pi t,\quad 0\leq t\leq 4\pi$.

$$\int_C Mdx+Ndy+Pdz=\int_0^1 4\pi dt=4\pi$$

4. (12 puntos). Sea S la semiesfera $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ .Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}=x\widehat{\mathbf{i}}+y\widehat{\mathbf{j}}+(z+1)\,\widehat{\mathbf{k}}$ dirigido hacia afuera a travez de la semiesfera S.

(Recuerde que el flujo viene dado por la integral $\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS$)

Sol-a) Observar que la superficie no es cerrada podemos agregar la base S_1a la semiesfera para obtener una superficie cerrada y aplicar el teorema de la divergencia y posteriormente restar S_1 la parte que agregamos

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS &= \iiint\limits_V \operatorname{div} f dV-\iint\limits_{S_1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS=\iiint\limits_V 3dV-\iint\limits_{S_1}(\mathbf{F}\cdot(-\mathbf{K}))\,dS\\ &= 2\pi+\iint\limits_{S_1} dA=2\pi+\pi=3\pi\end{aligned}$$

Sol b) Tambien se puede calcular directamente la integral de superficie. $z=g(x,y)=$

$\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS &= \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint\limits_{S_1} (x,y,z+1)\cdot\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)dA \\
&= \iint\limits_{S_1} (x,y,z+1)\cdot\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)dA \\
&= \iint\limits_{S_1} \left(\frac{1+z}{z}\right)dA = \iint\limits_{S_1} dA + \iint\limits_{S_1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dA \\
&= \pi + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta = \pi + 2\pi = 3\pi
\end{aligned}
$$