1 Fracciones algebraícas.

Si p y q son polinomios, la expresión de la forma $\frac{p}{q}$ recibe el nombre de fracción algebraíca .

Ejemplo 1 $\dfrac{x^2-5x+3}{x+6}$,$\dfrac{x^2+7}{x^4-2x+4}$.

Las fracciones algebraicas pueden simplificarse, simplificar una fracción algebraíca consiste en descomponer su numerador y su denominador en factores irreducibles en $\mathbb{R}$ y eliminar todos los factores que sean comunes al numerador y al denominador.

Ejemplo 2 $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x+6} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+2)} = \dfrac{x-2}{x+2}$

Definimos la suma de fracciones algebraícas asi: si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son fracciones algebraícas, $\frac{p}{q}+\frac{r}{s} = \dfrac{ps+rq}{qs}$.

Ejemplo 3 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2-5}{x} = \dfrac{1+x^2-5}{x} = \dfrac{x^2-4}{x}$

Ejemplo 4 $\dfrac{3+2x}{x+3}+\dfrac{4+x^2}{x+4} =$

$$\begin{aligned} & \frac{(3+2x)(x+4)+(x+3)\left(4+x^2\right)}{(x+3)(x+4)} \\ = & \frac{x^3+5x^2+15x+24}{x^2+7x+12} \end{aligned}$$

Ejemplo 5 $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+9x+20}+\dfrac{2x^2+7x-15}{x^2+3x-4}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-3)(x-5)}{(x+5)(x+4)}+\frac{(x+5)(2x-3)}{(x+4)(x-1)} \\ &= \frac{(x-3)(x-5)(x-1)}{(x+5)(x+4)(x-1)}+\frac{(x+5)(2x-3)(x+5)}{(x+5)(x+4)(x-1)} \\ &= \frac{(x-3)(x-5)(x-1)+(x+5)(2x-3)(x+5)}{(x+5)(x+4)(x-1)} = \\ &= \frac{3x^3+8x^2+43x-90}{(x+5)(x+4)(x-1)} = \frac{3x^3+8x^2+43x-90}{x^3+8x^2+11x-20} \end{aligned}$$

La resta se define como $\frac{p}{q}-\frac{r}{s} = \frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)$

Ejemplo 6 $\frac{x-11}{x+5}-\frac{x^2-3x-1}{x^2-25}=$

$$\begin{aligned}
& \frac{x-11}{x+5}+\frac{-\left(x^2-3x-1\right)}{x^2-25} \\
= & \frac{(x-11)(x-5)}{x^2-25}+\frac{-\left(x^2-3x-1\right)}{x^2-25} \\
& \frac{(x-11)(x-5)+\left(-\left(x^2-3x-1\right)\right)}{x^2-25} \\
= & \frac{x^2-16x+55-x^2+3x+1}{x^2-25} \\
= & \frac{-13x+56}{x^2-25}
\end{aligned}$$

El producto se define como $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{p\cdot r}{q\cdot s}$

Ejemplo 7 $\frac{x+7}{x^2-2x-35}\cdot\frac{x^2-25}{x^2+14x+49}=$

$$\begin{aligned}
& \frac{(x+7)\left(x^2-25\right)}{(x^2-2x-35)(x^2+14x+49)} \\
= & \frac{(x+7)(x-5)(x+5)}{(x-7)(x+5)(x+7)^2} \\
= & \frac{(x-5)}{(x-7)(x+7)}=\frac{(x-5)}{x^2-49}
\end{aligned}$$

La división se define como $\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}$

Ejemplo 8 $\frac{x^2-25}{x^2+14x+49}\div\frac{x+7}{x^2-2x-35}=$

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2-25}{x^2+14x+49}\cdot\frac{x^2-2x-35}{x+7} \\
= & \frac{\left(x^2-25\right)\left(x^2-2x-35\right)}{(x^2+14x+49)(x+7)} \\
= & \frac{(x-5)(x+5)(x-7)(x+5)}{(x+7)^2(x+7)} \\
= & \frac{(x-5)(x+5)^2(x-7)}{(x+7)^3}
\end{aligned}$$

1.1 Fracciones complejas

Una fracción compleja es una fracción en la que su denominador o en su numerador hay a su vez fracciones.

Ejemplo 9 $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{x+\dfrac{y}{x}}$, $\dfrac{\dfrac{4x}{x^2-2}+\dfrac{x}{x+1}}{3+x^3}$

Si se necesita transformar una fracción compleja en una fracción simple, se reducen, mediante operaciones algebraícas el numerador y el denominador de la fracción, y se eliminan todos los factores posibles

Ejemplo 10 $\dfrac{x-\dfrac{x}{x+2}}{x+\dfrac{1}{x^2+3x+2}}$ *Observe que* $x^2+3x+2=(x+2)(x+1) \Longrightarrow$

$$\frac{x-\dfrac{x}{x+2}}{x+\dfrac{1}{x^2+3x+2}} =$$

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x(x+2)-x}{x+2}}{\dfrac{x(x+2)(x+1)+1}{(x+2)(x+1)}} &= \frac{\dfrac{x^2+2x-x}{x+2}}{\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x+2)(x+1)}} \\
\frac{\dfrac{x^2+x}{x+2}}{\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x+2)(x+1)}} &= \frac{\dfrac{x(x+1)}{x+2}}{\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x+2)(x+1)}} \\
\frac{x(x+1)(x+2)(x+1)}{(x+2)(x^3+3x^2+2x+1)} &= \frac{x(x+1)^2}{x^3+3x^2+2x+1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11

1. Reescribe la fracción dada de tal manera que obtengas una fracción equivalente, con la expresión que se encuentra a la derecha de la coma como denominador.

   (a) $\dfrac{a+3b}{5ab^2}, (5ab)^3$

   (b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

2. Reducir cada fracción a su expresión mínima.

   (a) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}$

   (b) $\dfrac{(w+2z)\left(6w^2+7wz-3z^2\right)}{(3w-z)\left(2w^2-wz-6z^2\right)}$

(c) $\dfrac{x^9+y^9}{x^6-y^6}$

(d) $\dfrac{3ah+4bk-2ak-6bh}{2ah-4bh+ak-2bk}$

3. Efectuar la operación indicada y reducir cada resultado a su expresión mínima.

   (a) $\dfrac{3x-3y}{2x+4y}\cdot\dfrac{x+2y}{x-y}$

   (b) $\dfrac{x^2-9y^2}{2x+y}\div\left(3x^2-9xy\right)$

   (c) $\dfrac{x^3+8y^3}{x^2-4y^2}\cdot\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{9x^2+3xy+y^2}\div\dfrac{x^2-9y^2}{yx+3y^2}$

   (d) $\dfrac{15x-4}{5x-3}-2$

   (e) $\dfrac{9x^2-4y^2}{12xy}+\dfrac{2y}{6x}-\dfrac{-5x}{4y}$

   (f) $\dfrac{2}{(a+3b)}-\dfrac{3}{(a+3b)\,(a-2b)}+\dfrac{5}{(a+b)\,(a-2b)}$

   (g) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{8}-x$

4. Transformar las fracciones complejas en fracciones simples.

   (a) $\dfrac{x-\frac{16}{x}}{1-\frac{4}{x}}$

   (b) $\dfrac{2a-\dfrac{3a+4}{a-2}}{a-\dfrac{10a+4}{2a+3}}$

   (c) $\dfrac{\dfrac{p+2}{p-2}-\dfrac{p}{p+2}}{3-\dfrac{4}{p+2}}$

   (d) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x-4}}}$