UNIVERSIDAD DEL NORTE

PARCIAL I - CALCULO I 22 DE FEBRERO DE 2019 DV

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre Completo ______________________________

1. **[1.0 pts.]** Dada la siguiente función $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$, determine:

   a) Dominio de f.

   b) $f \circ g$, para $g(x) = x^2 + 1$.

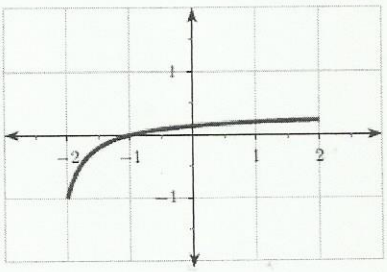
2. **[1.0 pts.]** Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-5, -4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(3, 11)$.

3. **[1.0 pts.]** Halle todas las asíntotas para la función racional dada. Halle también los puntos de corte con los ejes x y y.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{-x^3 + 3x^2 + 6x - 8}$$

4. **[1.0 pts.]** En el intervalo dado, la función $f(x)$ es invertible. Obtenga la inversa y realice un bosquejo de la gráfica de la función inversa en el mismo plano cartesiano.

$$f(x) = \frac{x+1}{3x+7}, \qquad x \in [-2, 2]$$



5. **[1.0 pts.]** Un ranchero desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1000 pies^2 usando dos tipos de valla distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta \$4 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta \$1,6 por pie. Exprese el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta \$4 por pie.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Parcial I - CALCULO I   22 de febrero de 2019 DV

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre completo ______________________________

1. [**1.0 pts.**] Dada la siguiente función $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{5x-2}}$, determine:

   a) Dominio de f.

   b) $f \circ g$, para $g(x) = x^2 + 1$.

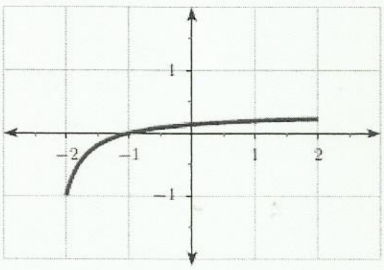
2. [**1.0 pts.**] Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-4, -5)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(11, 3)$.

3. [**1.0 pts.**] Halle todas las asíntotas para la función racional dada. Halle también los puntos de corte con los ejes x y y.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}$$

4. [**1.0 pts.**] En el intervalo dado, la función $f(x)$ es invertible. Obtenga la inversa y realice un bosquejo de la gráfica de la función inversa en el mismo plano cartesiano.

$$f(x) = \frac{x+1}{3x+7}, \qquad x \in [-2, 2]$$



5. [**1.0 pts.**] Un ranchero desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1000 pies^2 usando dos tipos de valla distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta \$3 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta \$1,2 por pie. Exprese el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta \$3 por pie.

Solución - Parcial I 22 feb 2019

DV

1) Dada $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$, determine:

a) Dominio:

$$3x - 1 > 0$$
$$3x > 1$$
$$x > \frac{1}{3} \text{ . luego:}$$

$$\boxed{Dom(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \tfrac{1}{3} \}}$$

o $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

b) $f \circ g$, si $g(x) = x^2+1$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x^2+1)$$
$$= \frac{2(x^2+1)}{\sqrt{3(x^2+1)-1}}$$

$$\boxed{f \circ g = \frac{2x^2+2}{\sqrt{3x^2+2}}}$$

2) Calculemos la Pendiente de recta que pasa por $(1,1)$ y $(3,11)$:

$$m = \frac{11-1}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

luego de la ecuación punto-pendiente Podemos hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-5,-4)$ y tiene pendiente m', tal que:

$m \cdot m' = -1$ (Por ser recta perpendicular a la dada)

$5 \cdot m' = -1$

$m' = -\frac{1}{5}$

Esto es:

$$y - (-4) = -\frac{1}{5}(x - (-5))$$
$$y + 4 = -\frac{1}{5}(x+5)$$
$$y + 4 = -\frac{1}{5}x - 1$$
$$y = -\frac{1}{5}x - 1 - 4$$
$$\boxed{y = -\frac{1}{5}x - 5}$$

3) Para $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{-x^3+3x^2+6x-8}$:

factorizamos como:

$$f(x) = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-1)(-x^2+2x+8)}$$

Al usar división sintética:

-1	3	6	-8	1
	-1	2	8	
-1	2	8	0	

$\underbrace{-1 \quad 2 \quad 8}_{-x^2+2x+8}$

$$\text{luego: } f(x) = \frac{(x+3)(x+2)}{-(x-1)(x-4)(x+2)}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{-(x-1)(x-4)}$$

Para $x = 1$, $x = 4$, existen asíntotas verticales.

Como el numerador tiene grado menor que el denominador, entonces

$$y = 0$$

es asíntota horizontal.

Cortes:

si $x = 0$, $f(0) = \frac{3}{-(-1)(-4)}$

$$f(0) = -\frac{3}{4}$$

luego $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ es el punto de corte en el eje y.

si $y = 0$, $0 = \frac{x+3}{-(x-1)(x-4)}$

esto es $x + 3 = 0$
$x = -3$,

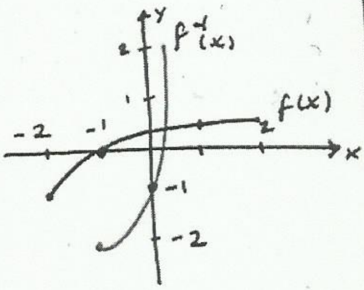
entonces $(-3, 0)$ es el corte en eje x

4) $y = \frac{x+1}{3x+7}$ $\quad x \in [-2, 2]$

Cambiando x por y, y por x:

$$x = \frac{y+1}{3y+7}$$

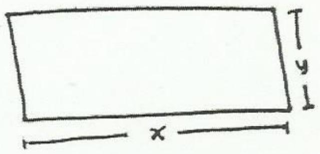
$$x(3y+7) = y+1$$
$$3xy + 7x = y + 1$$
$$3xy - y = 1 - 7x$$
$$y(3x-1) = 1 - 7x$$
$$y = \frac{1-7x}{3x-1}$$



Esto es $f^{-1}(x) = \frac{1-7x}{3x-1}$

5)

DV



Área := $A = 1000$ pies^2

lados del corral := x, y

Costo de la valla para x = \$4

Costo de la valla para y = \$ 1.6°

Sea C la función costo:

$$C = 2(4)x + 2(1{,}6)y$$
$$C = 8x + 3{,}2y$$

Como $A = xy$

$$1000 = xy$$
$$\boxed{\frac{1000}{x} = y} \quad (1)$$

Ahora sustituya (1) en la función costo:

$$C = 8x + 3{,}2\left(\frac{1000}{x}\right)$$
$$C = 8x + \frac{3200}{x}$$
$$\boxed{C = \frac{8x^2 + 3200}{x}}$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO I

Nombre:________________________________ Febrero 22 de 2.019

ATB

Duración del parcial: 80 minutos CCCCC

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos II, III y IV para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

(I) **Valoración 2.0 pts.** Seleccione la única opción correcta:

1. La inversa de la función inyectiva $f(x) = x^3 - 8$ es la función
   (a) $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x+8}$ (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}$ (c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$
2. El rango de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4x-3}}$ es igual a
   (a) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ (c) $\mathbb{R}$ (d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
3. La gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-1}$ corta al eje x en los puntos
   (a) $(-3,0)$ y $(1,0)$ (b) $(3,0)$ y $(-1,0)$ (c) $(-3,0)$ y $(-1,0)$ (d) $(3,0)$ y $(1,0)$
4. Una de las funciones que se puede obtener despejando y en la relación $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 3$ es
   (a) $y = 3-(x-3)^2$ (b) $y = \sqrt{3-(x-3)^2}+2$ (c) $y = -\sqrt{3-(x-3)^2}-2$
5. El conjunto solución (S) de la ecuación $ln(x) + ln(x-2) = ln(3)$ es
   (a) $S = \{3, -1\}$ (b) $S = \{3\}$ (c) $S = \{-1\}$ (d) $S = \{-3, 1\}$

(II) **Valoración 1.0 pt.** Si $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, encontrar $f \circ g$, $g \circ f$ y sus respectivos dominios.

(III) **Valoración 1.0 pt.** Graficar la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$ obteniendo previamente el vértice, el rango, cortes con los ejes coordenados y el eje de simetría.

(IV) **Valoración 1.0 pt.** Un ranchero desea cercar un terreno rectangular cuya área es de $1000m^2$. El terreno será cercado y dividido en dos porciones iguales mediante una cerca paralela a dos lados del terreno. Exprese la cantidad de valla usada como una función de la longitud de uno de los lados del terreno.

Éxitos

Solución del inciso II.

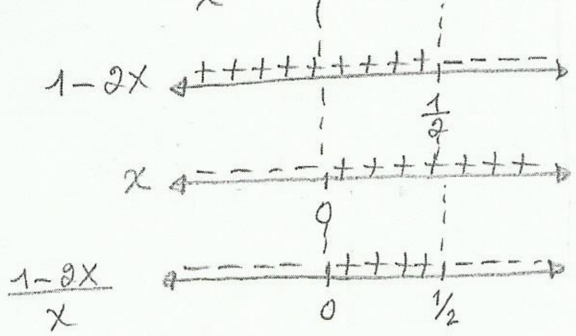
Hallemos inicialmente $f \circ g$ y $D_{f \circ g}$. ATB

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{\frac{1}{x} - 2} = \sqrt{\frac{1-2x}{x}}, \quad x \neq 0.$$

Tenemos que $D_f = [2, +\infty)$ y $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En consecuencia,

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \tfrac{1}{x} \in [2, +\infty)\}.$$

Ahora, $\frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \geq 0, \quad x \neq 0$



Por lo tanto, $D_{f \circ g} = (0, 1/2]$.

Hallemos ahora $g \circ f$ y $D_{g \circ f}$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in [2, +\infty) : \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Por lo tanto, $D_{g \circ f} = (2, +\infty)$.

ATB

Solución del inciso III.

Para la función $f(x) = x^2-6x+5$, consideremos $a=1$, $b=-6$ y $c=5$.

Tenemos que $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(5)-36}{4} = -4$ y $-\frac{b}{2a} = 3$.

Como $a>0$ se cumple que la parábola abre hacia arriba y en este caso el $R_f = [-4, +\infty)$. Además, el vértice es $V=(3,-4)$.

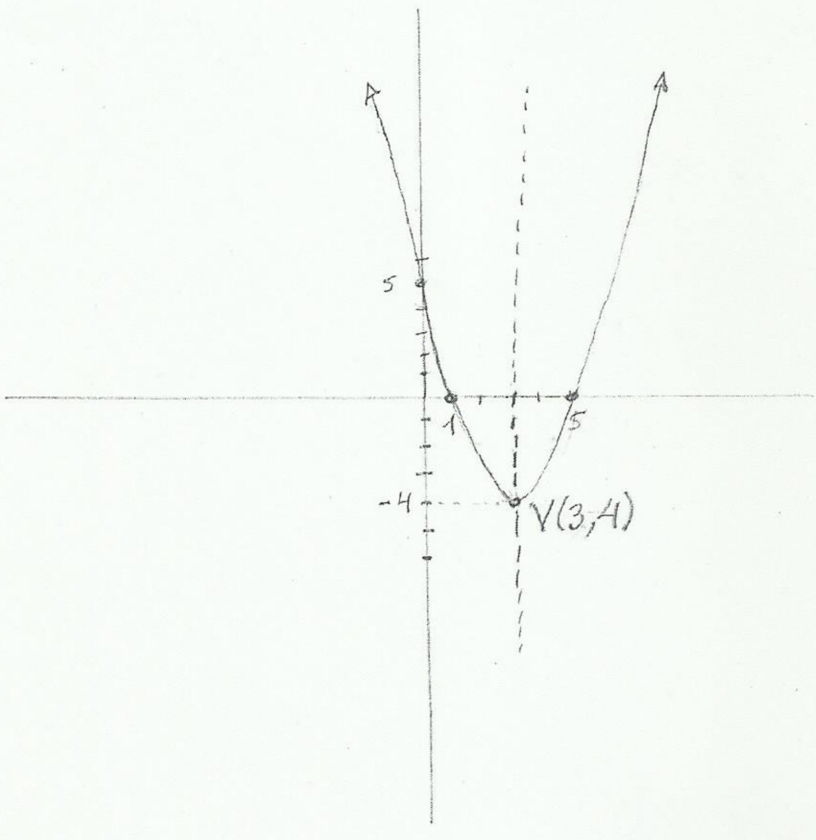
Hallemos los cortes con el eje x.

$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=5 \vee x=1.$

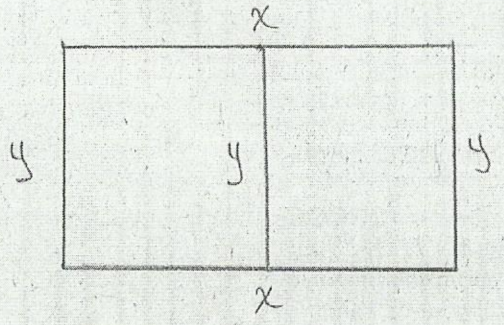
Así que los cortes con el eje x son: $(5,0)$ y $(1,0)$.

Como $f(0)=5$, se tiene que el corte con el eje y es el punto $(0,5)$.

El eje de simetría es la recta vertical $x=3$.



Solución del inciso IV. ATB



Sean $x>0$ e $y>0$ respectivamente la longitud y el ancho del terreno rectángular.

La función buscada es la "cantidad de valla" la cual vamos a representar con F. Así que

$$F = 2x+3y.$$

x e y están relacionadas por la restricción $xy = 1000$. Así que la cantidad de valla F como función de x es

$$F(x) = 2x + 3\left(\frac{1000}{x}\right) = 2x + \frac{3000}{x}.$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO I

Nombre:____________________________________ Febrero 21 de 2.019

ATB

Duración del parcial: 80 minutos AAAAA

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos *II*, *III* y *IV* para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

(*I*) **Valoración 2.0 pts.** Seleccione la única opción correcta:

1. Una de las funciones que se puede obtener despejando y en la relación $(x-3)^2+(y+2)^2=3$ es
   (*a*) $y=3-(x-3)^2$ (*b*) $y=\sqrt{3-(x-3)^2}-2$ (*c*) $y=\sqrt{3-(x-3)^2}+2$

2. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^2-5x}$ es igual a
   (*a*) $(-\infty,0]\cup[5,+\infty)$ (*b*) $(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$ (*c*) $(0,+\infty)$ (*d*) $[5,+\infty)$

3. La gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}$ corta al eje x en los puntos
   (*a*) $(-3,0)$ y $(1,0)$ (*b*) $(3,0)$ y $(1,0)$ (*c*) $(3,0)$ y $(-1,0)$ (*d*) $(-3,0)$ y $(-1,0)$

4. El conjunto solución (S) de la ecuación $ln(x)+ln(x-2)=ln(3)$ es
   (*a*) $S=\{3,-1\}$ (*b*) $S=\{3\}$ (*c*) $S=\{-1\}$ (*d*) $S=\{-3,1\}$

5. La inversa de la función inyectiva $f(x)=x^3+2$ es la función
   (*a*) $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{x-2}$ (*b*) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$ (*c*) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

(*II*) **Valoración 1.0 pt.** Graficar la función cuadrática $f(x)=-x^2+6x-5$ obteniendo previamente el vértice, el rango, cortes con los ejes coordenados y el eje de simetría.

(*III*) **Valoración 1.0 pt.** Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es $y=\sqrt{25-x^2}$. Exprese el área del rectángulo como una función de x.

(*IV*) **Valoración 1.0 pt.** Si $f(x)=\sqrt{x-2}$ y $g(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, encontrar $f\circ g$, $g\circ f$ y sus respectivos dominios.

Éxitos

Solución del inciso II.

Dado $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ tenemos que $a = -1$, $b = 6$ y $c = -5$.

Por otra parte, $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-5) - 36}{4(-1)} = 4$ y $-\frac{b}{2a} = 3$.

Como $a < 0$ tenemos que la parábola abre hacia abajo y en este caso el $R_f = (-\infty, 4]$. Además, el vértice es $V = (3, 4)$.

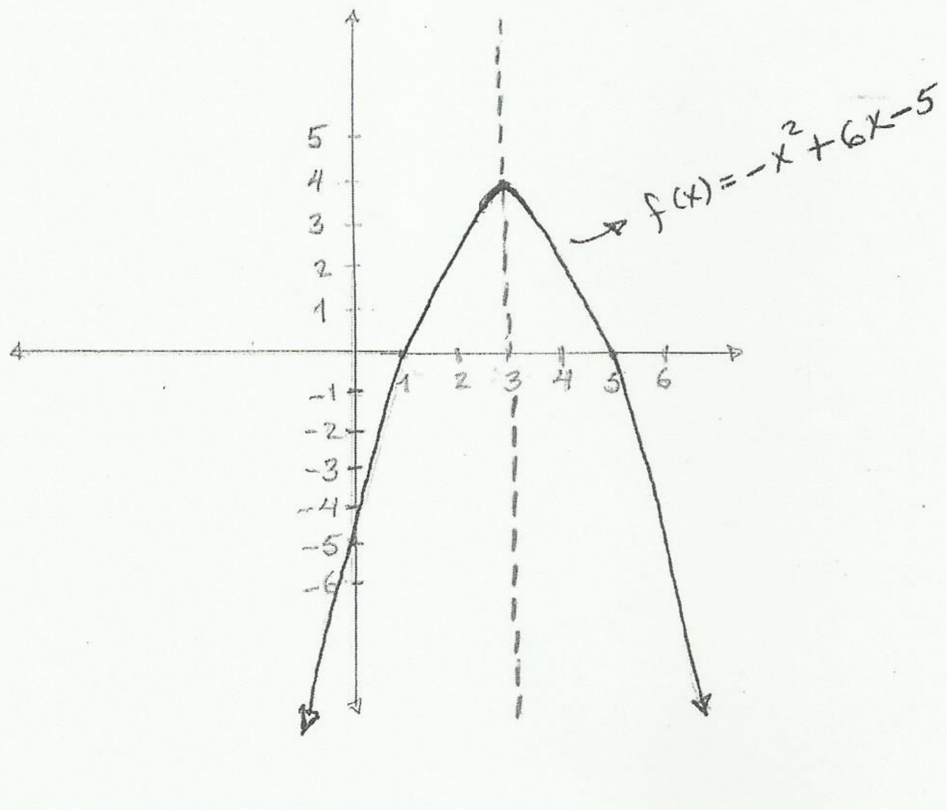
Hallemos los cortes con el eje x.

$-x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1.$

Así que los cortes con el eje x son: $(5,0)$ y $(1,0)$.

Como $f(0) = -5$, tenemos que el corte con el eje y es el punto $(0,-5)$.

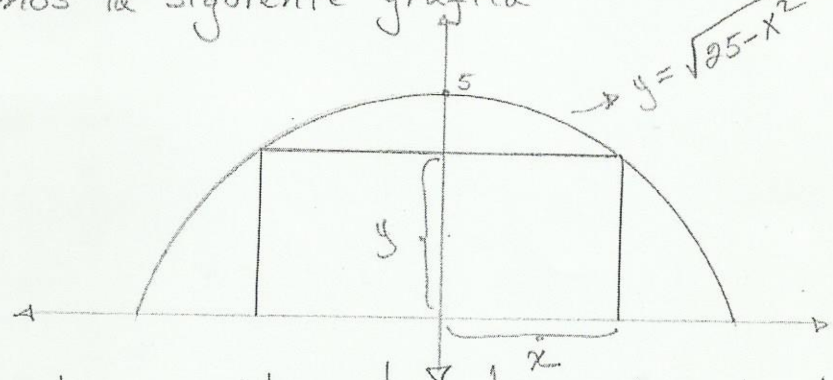
El eje de simetría es la recta vertical $x = 3$.



ATB

Solución del inciso III.

Consideremos la siguiente gráfica



Tenemos que el área del rectángulo es $A=2xy$. La restricción es $y=\sqrt{25-x^2}$, así que la función que expresa el área del rectángulo como una función de x es $A(x)=2x\sqrt{25-x^2}$.

Solución del inciso IV.

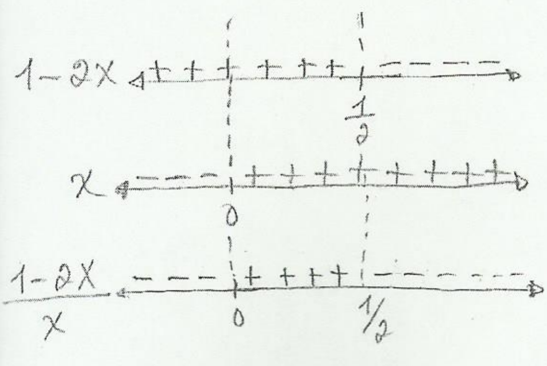
Hallemos inicialmente $f\circ g$ y $D_{f\circ g}$.

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\sqrt{\frac{1}{x}-2}=\sqrt{\frac{1-2x}{x}},\quad x\neq 0.$$

Tenemos que $D_f=[2,+\infty)$ y $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. En consecuencia,

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g:\ g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \tfrac{1}{x}\in[2,+\infty)\}.$$

Ahora, $\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x}\geq 0,\ x\neq 0.$



Por lo tanto, $D_{f\circ g}=(0,\ 1/2]$

Hallemos ahora $g \circ f$ y $D_{g \circ f}$.

ATM

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in [2, +\infty) : \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

En consecuencia, $D_{g \circ f} = (2, +\infty)$.

Primer Parcial de Cálculo 1, Fila A

Febrero de 2019

BB

Nombre:______________________________**Código:** __________**Grupo:**___

Observaciones: La duración del examen es de **90 minutos**. El uso de dispositivos electrónicos y calculadoras durante el examen es causal de anulación del parcial.

1. (**4 puntos**) *a*) Calcule el dominio de la función $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x - 3\right)$.
   b) Grafique en el mismo plano cartesiano las funciones $f(x) = \ln x$, $g(x) = -\ln(x+2)$ y $g^{-1}(x)$ que es la inversa de g. Argumente claramente como graficó g y g^{-1}. Observación: tenga en cuenta que $\ln(2) \approx 0.7$.

2. (**6 puntos**) Sea $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-3x}$. Calcule:

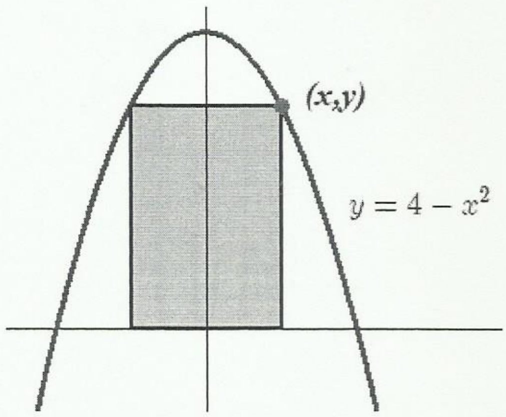
   (a) Las intersecciones de la gráfica de f con los ejes coordenados.

   (b) Las asintotas lineales de f.

   (c) La inversa de f, es decir $f^{-1}(x)$.

   (d) Verifique que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$.

3. (**5 puntos**) Calcule $A(x)$ el cual representa el área de la región sombreada (en la figura) en función de x. Además calcule y simplifique al máximo $\dfrac{A(1+h) - A(1)}{h}$, donde h es cualquier número positivo menor que 1.



B B

Rúbrica del primer parcial de Cálculo 1, Fila A, febrero 2019

1) Valor 5 puntos, discriminados de la siguiente manera:
   a) 2.5 puntos:
      - **0.5** si escribe correctamente la inecuación que indica que el logaritmo está definido es para números positivos.
      - **1.5** si resuelve correctamente la inecuación.
      - **0.5** si escribe correctamente el dominio de f.

   b) 2.5 puntos:
      - **0.5** si hace un buen bosquejo de la gráfica de f .
      - **1.0** si hace un buen bosquejo de la gráfica de g, ubicando correctamente por lo menos dos puntos de su gráfica y usando las transformaciones correctas a la gráfica de f.
      - **1.0** si hace un buen bosquejo de la gráfica de g^{-1}, ubicando correctamente por lo menos dos puntos de su gráfica y usando sus simetrías con la recta $y = x$.

2) Valor 5 puntos, discriminados de la siguiente manera:
   a) 1.0 punto:
      - **0.5** si calcula correctamente la intersección con el eje x.
      - **0.5** si calcula correctamente las intersección con el eje y.

   b) 1.0 punto:
      - **0.5** si calcula correctamente la asíntota vertical.
      - **0.5** si calcula correctamente la asíntota horizontal.

   c) 1.5 puntos:
      - **0.5** si escribe $y = f(x)$ e inicia el despeje correctamente.
      - **1.5** si además de lo anterior determina y escribe correctamente $f^{-1}(x)$.

   d) 1.5 puntos:
      - **0.5** si hace correctamente la composición $(f \circ f^{-1})(x)$.
      - **1.0** si simplifica correctamente hasta llegar a que es igual a x.

3) Valor 5 puntos, discriminados de la siguiente manera:
   - **1.5** si escribe correctamente el área de la región sombreada en términos de x, y.
   - **1.5** escribe correctamente el área de la región sombreada en términos de x.
   - **0.5** si calcula correctamente $A(1)$.
   - **0.5** si calcula correctamente $A(1 + h)$.
   - **0.7** si calcula y simplifica correctamente $A(1 + h) - A(1)$.
   - **0.3** si simplifica correctamente $\frac{A(1+h)-A(1)}{h}$.

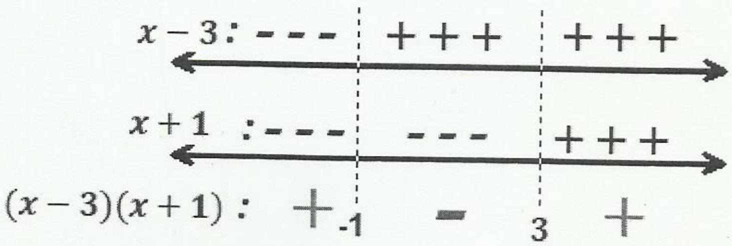
NOTA: La rúbrica de la **fila B** es similar, pero intercambiando el orden de los puntos 1) y 2).

DD

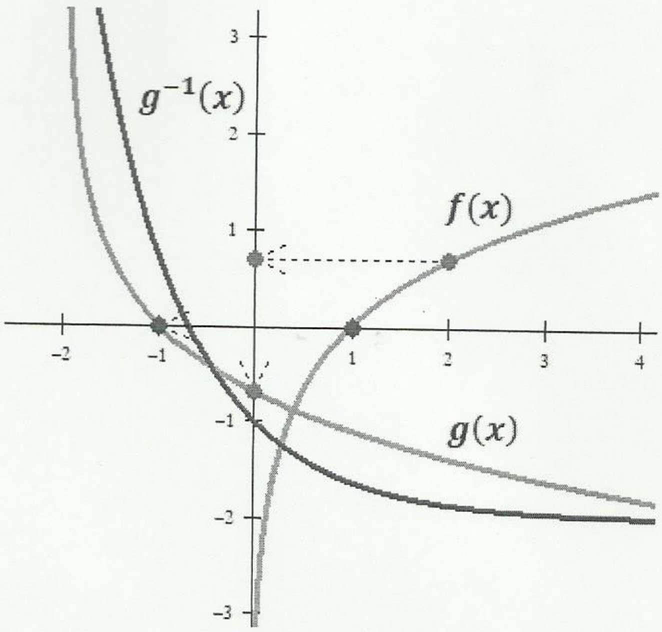
Primer Parcial de Cálculo 1, Solución de la Fila A

Febrero de 2019

1. *a*) $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x - 3\right)$. Como el logaritmo está definido es para números positivos, entonces $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3\right\} = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$, ya que $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ y



b) Observando la función $g(x) = -\ln(x+2)$ notamos que su gráfica es la de $f(x) = \ln(x)$, pero trasladada dos unidades hacia la izquierda (debido al dos sumando a x) y reflejada con respecto al eje x (debido al signo menos que está multiplicando a ln). Para graficar la inversa de $g(x)$ cambiamos el orden de las coordenadas de los puntos $(0, -0.7), (-1, 0)$ que estan en la gráfica de g y tenemos en cuenta la simetría con la recta $y = x$:



BD

2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-3x}$. Calcule:

(a) Interseccción con el eje x: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{2x-1}{2-3x} = 0 \Longrightarrow 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2$. Ahora, para calcular la intersección con el eje y, hacemos $x = 0$. Entonces $y = f(0) = \dfrac{2\,(0)-1}{2-3\,(0)} = \dfrac{-1}{2}$.

(b) $2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow 3x = 2 \Longleftrightarrow x = 2/3$. Entonces $x = 2/3$ es la asíntota vertical para la gráfica de f. Ahora como el numerador y el denominador son polinomios de igual grado, entonces $y = \dfrac{2}{-3}$ (o equivalentemente $y = -\dfrac{2}{3}$) es la asíntota horizontal para la gráfica de f. No hay asíntota oblicua debido a la presencia de la asíntota horizontal.

(c) Sea $y = f(x)$, entonces

$$
\begin{aligned}
y = \frac{2x-1}{2-3x} &\Longleftrightarrow y\,(2-3x) = 2x - 1 \Longleftrightarrow 2y - 3xy = 2x - 1 \\
&\Longleftrightarrow 2y + 1 = 2x + 3xy \Longleftrightarrow 2y + 1 = x\,(2 + 3y) \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{2y+1}{2+3y} =: \left(f^{-1}\right)(y).
\end{aligned}
$$

Luego $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

BD

(d)

$$
\begin{aligned}
\left(f \circ f^{-1}\right)(x) &= f\left(f^{-1}(x)\right) \\
&= f\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right) \\
&= \frac{2\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)-1}{2-3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)} \\
&= \frac{\frac{4x+2}{3x+2}-1}{2-\frac{6x+3}{3x+2}} \\
&= \frac{\frac{4x+2-(3x+2)}{3x+2}}{\frac{2(3x+2)-(6x+3)}{3x+2}} \\
&= \frac{4x+2-(3x+2)}{2(3x+2)-(6x+3)} \\
&= \frac{4x+2-3x-2}{6x+4-6x-3} \\
&= \frac{x}{1} = x.
\end{aligned}
$$

3. Por la simetría de la figura, notamos que el área de la región rectángular es dos veces el área de la región rectángular que está en el primer cuadrante y que tiene como base x y como altura y. Así que $A = 2xy$ es e área de la región sombreada. Como $y = 4 - x^2$, entonces

$$A(x) = 2x\left(4 - x^2\right).$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\frac{A(1+h)-A(1)}{h} &= \frac{\left[2\,(1+h)\left(4-(1+h)^2\right)\right]-\left[2\,(1)\left(4-(1)^2\right)\right]}{h} \\
&= \frac{\left[2\,(1+h)\left(4-\left(1+2h+h^2\right)\right)\right]-[6]}{h} \\
&= \frac{2\,(1+h)\left(3-2h-h^2\right)-6}{h} \\
&= \frac{2\left(3-2h-h^2+3h-2h^2-h^3\right)-6}{h} \\
&= \frac{6-4h-2h^2+6h-4h^2-2h^3-6}{h} \\
&= \frac{2h-6h^2-2h^3}{h} \\
&= \frac{h\left(2-6h-2h^2\right)}{h} = 2-6h-2h^2
\end{aligned}
$$

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
PRIMER PARCIAL JR 2019-10

INSTRUCCIONES:	a)	Duración: 100 minutos.
	b)	La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
	c)	Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente

FILA A

Ejercicio 1.-[1.0 puntos]
Dibuje la gráfica de la función a trozos dada y determine su dominio y su rango

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{si } -6\le x<-3,\\ \sqrt{3-x^2-2x}, & \text{si } -3\le x<1,\\ x-1 & \text{si } 1<x<2. \end{cases}$$

Ejercicio 2.-[1.50 puntos]

(a) **[0.75 puntos**]Resolver la siguiente inecuación polinómica

$$2x^4-7x^3+5x^2-7x+3<0$$

(b)**[0.75 puntos**] Resolver la siguiente ecuación

$$3^{2(x+2)}-4\times 3^x-69=0$$

Ejercicio 3.-[1.0 puntos] Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre si 30 m. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de éstos. Hallar la longitud del cable en términos de x.

Ejercicio 4.-[1.5 puntos]
Encuentre todas las asíntotas y trace la gráfica de f:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

J. Rodriguez

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
SOLUCIÓN PRIMER PARCIAL

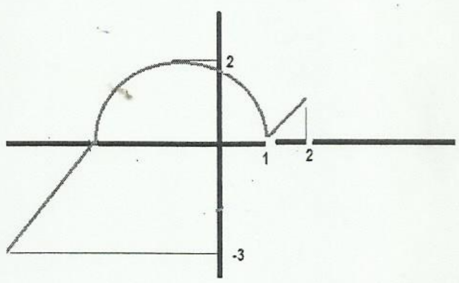
SOLUCIÓN

JR 2019-10

Ejercicio 1.
Analicemos cada una de las partes de $f(x)$
$y = x + 3$, luego la gráfica de $f(x)$ en $-6 \leq x < 3$ es una recta

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3 - x^2 - 2x} \\ y^2 &= 3 - x^2 - 2x \\ 3 &= x^2 + 2x + y^2 \\ 4 &= (x+1)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Así que la gráfica de $f(x)$ en $-3 \leq x < 1$ es la parte superior de la circunferencia con centro en $(-1, 0)$ y radio 2
$y = x - 1$, entonces la gráfica de $f(x)$ en $1 < x < 2$ es una recta.
El dominio es $D = [-6, 1) \bigcup (1, 2)$ y su rango $R = [-3, 2]$



Ejercicio 2.

(a) Primero factorizamos el polinomio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$, calculamos al polinomio en las posibles raíces.
$p(1/2) = 0$ y $p(3) = 0$, es decir $1/2$ y 3 son raíces reales del polinomio. Realizamos la division sintética sucesivamente por estas dos raíces y obtenemos que

$$p(x) = (x - 1/2)(x - 3)(2x^2 + 2)$$

Con lo cual

$$(x - 1/2)(x - 3)(2x^2 + 2) < 0$$

ahora como $2x^2 + 2 > 0$ se tiene que

$$(x - 1/2)(x - 3) < 0$$

luego

JR 201910

así que la solución de la desigualdad es

$$S = (1/2, 3)$$

(b) $3^{2(x+2)} - 4 \times 3^x - 69 = 0$

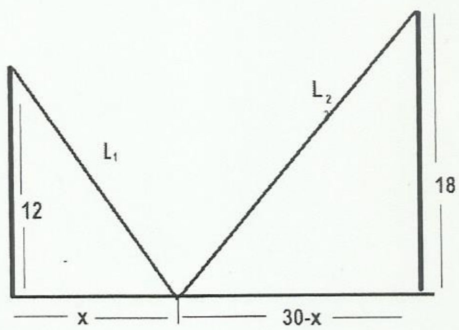
$$\begin{aligned} 3^{2(x+2)} - 4 \times 3^x - 69 &= 9 \times 3^{2x} - 4 \times 3^x - 69 \\ &= 9 \times \left(3^x\right)^2 - 4 \times 3^x - 69 \end{aligned}$$

Así que $9 \times \left(3^x\right)^2 - 4 \times 3^x - 69 = 0$ aplicando la formula cuadrática se tiene que

$$3^x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 2484}}{18} = \frac{4 \pm 50}{18}$$

Como 3^x es positivo la única solución es $3^x = 3$, luego $x = 1$

Ejercicio 3.
Sea $L(x)$ la longitud del cable



luego $L(x) = l_1(x) + L_2(x)$, según la figura, aplicando Pitágoras
$L_1(x) = \sqrt{144 + x^2}$ y $L_2(x) = \sqrt{324 + (30 - x)^2}$

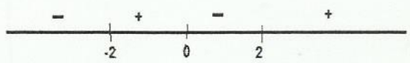
Por lo tanto

$$L(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{324 + (30 - x)^2}$$

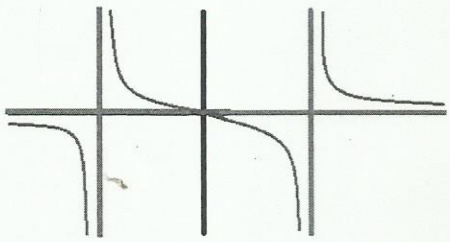
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
SOLUCIÓN PRIMER PARCIAL

JR2009-10

Ejercicio 4.
Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
Sabemos que x y $x^2 - 4$ no tienen factores comunes, así que $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales. Por otro lado el grado del polinomio x es menor que el grado del polinomio $x^2 - 4$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal. Los signos de $f(x)$ vienen dados tal como aparecen en la figura, en cada uno de los intervalos y $f(0) = 0$



Por lo tanto la gráfica de la función $f(x)$ viene dada como en la figura



J. Rodriguez

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer Parcial (21/02/2019)
Cálculo I HM

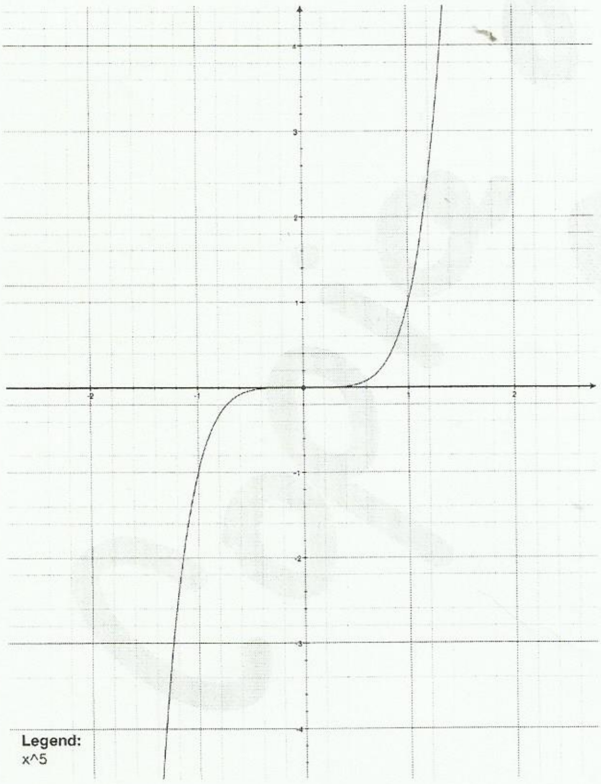
Nombre:______________________________ Código:__________________

No se permite el uso de ningún tipo de apuntes, libros o calculadoras graficadoras. Cualquier dispositivo electrónico, en particular su celular, debe permanecer apagado durante el examen. No acatar éstas órdenes será motivo de anulación del examen.

Nota: Para obtener el máximo puntaje en cada pregunta, además de tener la respuesta correcta, **usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta**.

1) (a) **(0.5 puntos)** Usando traslaciones horizontales y verticales, trazar la gráfica de $y = (x-1)^5 - 2$, a partir de la gráfica $y = x^5$.

   (b) **(0.5 puntos)** Los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$ están sobre la gráfica de $y = x^5$, muestre las coordenadas de los nuevos puntos en la gráfica de $y = (x-1)^5 - 2$.



2) Sea la función $f(x) = -x^2(x^2 - 1)$.

   (a) **(0.5 puntos)** Determine si f es par o impar; los puntos de intersección de f con respecto a los ejes x, y; y ver el comportamiento de f cuando $|x|$ toma valores muy grandes.

   (b) **(0.5 puntos)** Haz un esbozo de la gráfica de la función f.

3) Considere la función $f(x) = \dfrac{4x-9}{2x+3}$.

   (a) **(0.5 puntos)** Encuentre todos los puntos asintóticos de f, y de ser posible, los puntos en donde f corta al eje x y al eje y. Determine $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{R}_f$.

   (b) **(0.5 puntos)** Haz un esbozo de la gráfica de f.

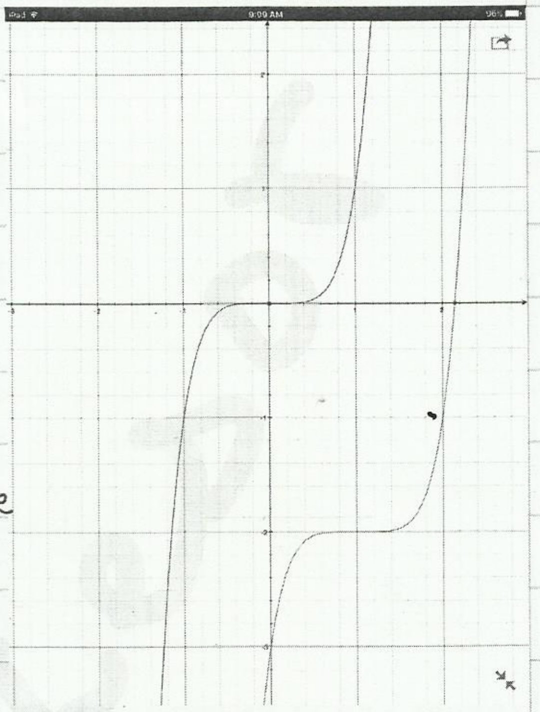
   (c) **(0.5 puntos)** Determine si f es una función uno a uno en $\mathcal{D}_f$. De no serlo, restrinja a $\mathcal{D}_f$ de tal manera que f sea una función uno a uno. Halle f^{-1}, $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ y $\mathcal{R}_{f^{-1}}$. Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

   (d) **(0.5 puntos)** Haz un esbozo de la gráfica de f^{-1}.

4) **(1 punto)** Resuelva la ecuación $2^{4x}e^{1-4x} = e^2$.

HM

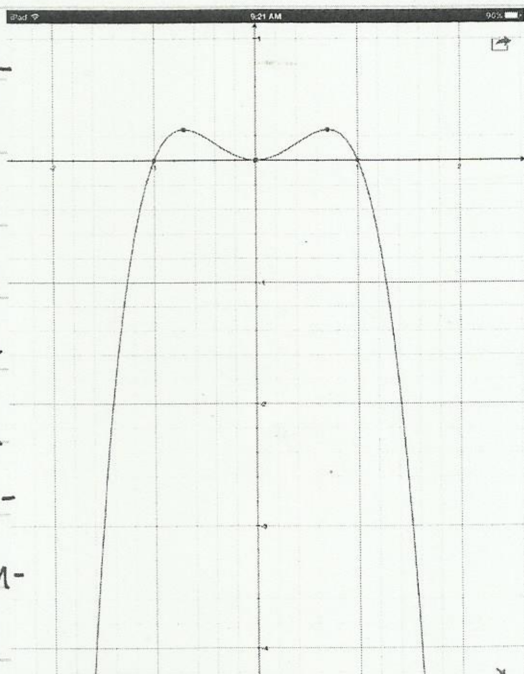
1) Tenemos que trasladar la función f que está dada por $f(x) = x^5$ (gráf. en azul). Note que $y = (x-1)^5 - 2$ se puede definir a partir de f de la siguiente manera



$$g(x) = f(x-1) - 2.$$

De lo visto en clase, se sabe que la nueva función g se mueve una unidad a la derecha y dos unidades hacia abajo (Gráf. en rojo). De lo anterior, tenemos que los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son movidos a $(1,-2)$, $(2,-1)$ y $(0,-3)$.

2) Note que los exponentes del polinomio



$$f(x) = -x^2(x^2-1),$$

son pares, se puede deducir que f es una función par. Por otro lado los ceros de f son 0 y ± 1. En 0 es un cero de multiplicidad par; y en ± 1 son cero simples. Por otro lado obsérvese que

$$f(x) = -x^4(1 - 1/x^2).$$

Tomando $|x|$ valores muy grandes, vemos que

AM

$(1 - 1/x^2)$ se está aproximando a 1. De aquí que $f(x) \approx -x^4$ cuando $|x|$ toma valores muy grandes.

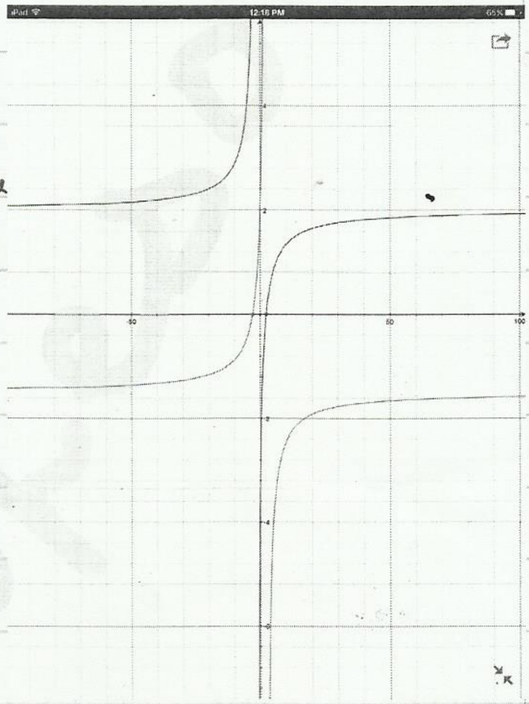
3) Dado que el grado del polinomio del numerador y del denominador es 1, se sigue que tiene una asíntota horizontal en

$$4/2 = 2.$$

Quiere decir que

$$f(x) = (4x-9)/(2x+3) \approx 2,$$

cuando $|x|$ toma valores muy grandes (gráf. en azul). También vemos que tiene una asíntota vertical en $-3/2$, dado que el denominador es cero (gráf. en azul). Para ver si $f(x)$ corta el eje x, simplemente igualamos el numerador a cero, obteniendo $x = 9/4$.



El dominio y el rango de la función f están dados por

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3/2\} \text{ y } R_f = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Vemos también que f es una función uno-uno en D_f. Quie-

IAM

re decir que es invertible. Además, El dominio y el rango de f^{-1} son: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\}$ y $R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{-3/2\}$.

En este caso se puede calcular la inversa:

$$x = \frac{4y-9}{2y+3}$$

$$2xy + 3x = 4y - 9$$

$$2xy - 4y = -9 - 3x$$

$$2y(x-2) = -3(3+x)$$

$$y = \frac{-3(3+x)}{2(x-2)}$$

La gráfica de $f^{-1}(x) = -3(3+x)/2(x-2)$ aparece arriba en rojo.

Verifiquemos que $(f \circ f^{-1}) = x$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(-3(3+x)/2(x-2)\right)$$

$$= \frac{4\left(\frac{-3(3+x)}{2(x-2)}\right) - 9}{2\left(\frac{-3(3+x)}{2(x-2)}\right) + 3}$$

$$= \frac{-6(3+x) - 9(x-2)}{-3(3+x) + 3(x-2)} = \frac{-15x}{-15} = x$$

IAM

4)

$$2^{4x} e^{1-4x} = e^2$$

$$\ln[2^{4x} e^{1-4x}] = \ln[e^2]$$

$$4x \ln 2 + 1 - 4x = 2$$

$$4x[\ln 2 - 1] = 1$$

$$x = \frac{1}{\ln 2 - 1}$$