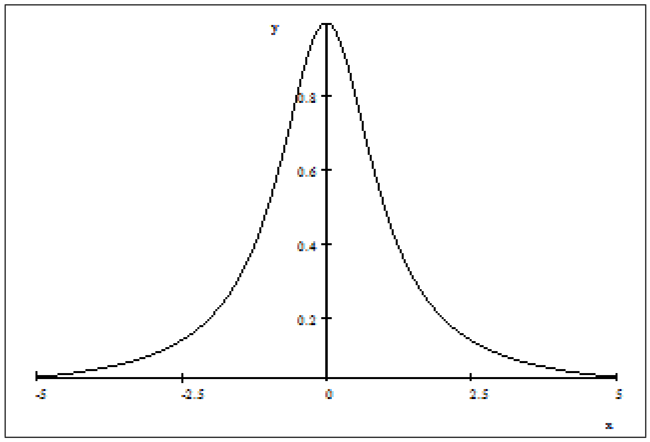
Aplicaciones de la derivada

1. Encontrar el punto sobre la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



donde la rececta tangente tiene la pendiente máxima y el punto donde la recta tangente tiene la pendiente mínima.

Solución 1 *La derivada de una función g es la función que permite calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de g en cada uno de los puntos en donde g y g' están definidas.* $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ *define las pendientes de las rectas tangentes a f, hay que encontrar los valores extremos de la función f', por tanto, se halla su derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.* $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ *Los extremos ocurren en* $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ *Para verificar cuál es el máximo y cual el mínimo hallamos la derivada de $f''(x)$:*

$$f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{24\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right)}{\left(1+\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^4} = \frac{-\frac{16}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4} < 0$$

$$f'''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{24\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^4} = \frac{\frac{16}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4} > 0$$

Por tanto, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ *es un máximo y* $\sqrt{\frac{1}{3}}$ *es un mínimo. En el punto*

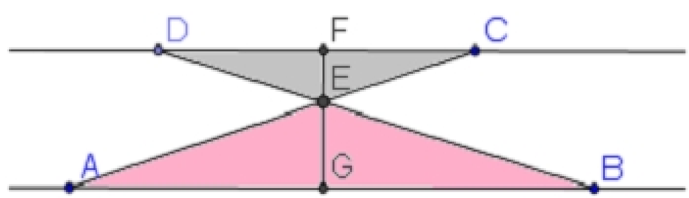
$$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{-9}{16}\right)$$

la recta tangente a f *tiene la máxima pendiente y en*

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{-9}{16}\right)$$

la mínima.

2. La recta que une A y C cruza las dos rectas paralelas como se muestra en la figura. El punto B está a d unidades de A. ¿A qué distancia de C debe situarse el punto D de manera que la suma de las áreas de los dos triángulos sombreados sea un mínimo?



Solución 2 $AB = d$, $DC = x$, $EF = h_1$, $EG = h_2$, $h_1 + h_2 = h$, *distancia constante que separa las rectas paralelas. Los triángulos* $\triangle AEB$ *y* $\triangle CED$ *son semejantes (Teorema A.A.A.), por tanto las alturas correspondientes son proporcionales a los lados correspondientes,*

$$\frac{d}{x} = \frac{h-h_1}{h_1} \Rightarrow x = \frac{dh_1}{h-h_1}$$

$$a\left(\triangle AEB\right)=\frac{d\left(h-h_1\right)}{2}, a\left(\triangle CED\right)=\frac{xh_1}{2}=\frac{dh_1^2}{2\left(h-h_1\right)}$$

$$a\left(\triangle AEB\right)+a\left(\triangle CED\right)=\frac{d\left(h-h_1\right)^2+dh_1^2}{2\left(h-h_1\right)}=a\left(h_1\right)$$

es esta la función objetivo, derivando con respecto a h_1*,*

$$a'\left(h_1\right)=\frac{d\left(-2h_1^2+4hh_1-h^2\right)}{2\left(h-h_1\right)^2}$$

e igualando a cero, $-2h_1^2+4hh_1-h^2=0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{-4h\pm\sqrt{16h^2-4\left(-h^2\right)\left(-2\right)}}{-4}= \\ &= \frac{-4h\pm\sqrt{8h^2}}{-4}=\frac{-4h\pm\sqrt{8h^2}}{-4}=\frac{h\left(2\pm\sqrt{2}\right)}{2} \end{aligned}$$

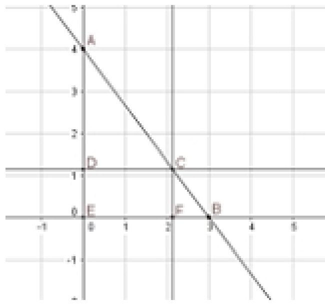
La segunda derivada de $a\left(h_1\right)$ *permite decidir acerca de cuál de estos valores minimiza y cuál maximiza el área.* $a''\left(h_1\right)=\dfrac{dh^2}{\left(h-h_1\right)^3} \Rightarrow$

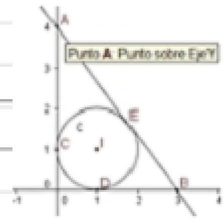
$$\begin{aligned} a''\left(\frac{h\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right) &= \frac{dh^2}{\left(h-\dfrac{h\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right)^3}=\frac{2\sqrt{2}d}{h}>0 \\ a''\left(\frac{h\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\right) &= \frac{dh^2}{\left(h-\dfrac{h\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\right)^3}=-\frac{2\sqrt{2}d}{h}<0 \end{aligned}$$

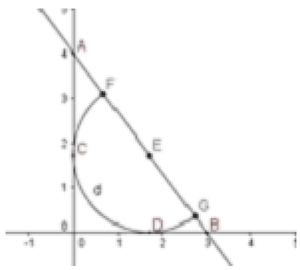
$\Rightarrow x=\left(\sqrt{2}-1\right)d \vee x=-\left(\sqrt{2}+1\right)d$*. El valor que minimiza el área es:* $\left(\sqrt{2}-1\right)d$ *y* $-\left(\sqrt{2}+1\right)d$ *maximiza el área, el negativo significa que el punto deberá colocarse a la derecha de* C*, en este caso no se formarían un par de triángulos sino un trapecio de altura* h *y bases* d *y* $\left(\sqrt{2}+1\right)d$*.*

3. Las figuras muestran un rectángulo, un círculo y un semicírculo inscritos en un triángulo ubicado en el primer cuadrante, delimitado por los ejes de coordenadas y la porción de recta que pasa por $(3,0)$ y $(0,4)$. Encontrar las dimensiones de cada figura inscrita de manera tal que su área sea

máxima.







Solución 3 *Para las tres situaciones se tendrá en cuenta el hecho que la recta que pasa por los puntos de coordenadas* $(3,0)$ *y* $(0,4)$ *tiene por ecuación* $y = 4 - \frac{4}{3}x$ $\left(y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right)$ *en consecuencia, cualquier punto sobre la recta será de la forma* $\left(x, 4 - \frac{4}{3}x\right)$. *El punto* F *del rectángulo* $DCEF$ *tiene por coordenadas* $(x,0)$ *el punto* C, *al estar sobre la recta, tendrá coordenadas* $\left(x, 4 - \frac{4}{3}x\right) \Rightarrow FC = \left|4 - \frac{4}{3}x\right|$ *la función objetivo es el área del rectángulo* $DCEF$, *cuya base es* $x > 0$ *y altura* $\left|4 - \frac{4}{3}x\right| = 4 - \frac{4}{3}x \Rightarrow$

$$a_{\square DCEF}(x) = x\left(\frac{12 - 4x}{3}\right) = 4x - \frac{4x^2}{3}$$

derivando con respecto a x *e igualando a cero,* $4 - \frac{8x}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \wedge y = 2$ *La segunda derivada,* $-\frac{8}{3}$ *confirma que el valor es un máximo. Una forma alternativa es considerar que el rectángulo* $DCEF$, *determina los* $\triangle ADC$ *y* $\triangle CFB$ *que son semejantes, sea* $DE = y$, $EF = x$, $AD = 4 - y$, $FB = 3 - x \Rightarrow \frac{4 - y}{y} = \frac{x}{3 - x} \wedge y = \frac{12 - 4x}{3}$ *lo cual conduce al mismo resultado.*

Solución 4 *Para el círculo, se debe tener en cuenta que el área es función del radio, por tanto, el área será máxima cuando la distancia entre* *cualquiera de los puntos de tangencia y el centro de la circunferencia sea máxima. En toda circunferencia, la recta tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia. Las coordenadas de los puntos de tangencia serán:*

$$D:(d,0)\,,C:(0,d)\,,E:\left(a,4-\frac{4}{3}a\right)$$

ya que el punto E está sobre la recta $y=4-\frac{4}{3}x$. El centro I de la circunferencia tiene coordenadas (d,d) y la recta que pasa por los puntos E e I, por ser perpendicular a la recta $y=4-\frac{4}{3}x$, tiene por ecuación $y=\frac{3}{4}x+d$. Las coordenadas del punto E deben satisfacer tanto la ecuación de la recta tangente como la ecuación de la recta $y=\frac{3}{4}x+d$

$$\begin{aligned}
E &: \left(a,4-\frac{4}{3}a\right)=\left(a,\frac{3}{4}a+d\right)\Rightarrow\frac{3}{4}a+d=4-\frac{4}{3}a\\
&\Rightarrow a=\frac{12}{25}(4-d)\\
E &: \left(\frac{48-12d}{25},\frac{36-16d}{25}\right)
\end{aligned}$$

La función distancia es:

$$\begin{aligned}
f(d) &= \sqrt{\left(\frac{48-12d}{25}-d\right)^2+\left(\frac{36-16d}{25}-d\right)^2}=\\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{72-12d+61d^2}}{5}\\
&\Rightarrow f'(d)=\frac{2\sqrt{2}}{10}\frac{-6+61d}{\sqrt{72-12d+61d^2}}
\end{aligned}$$

entonces, si $61d-6=0$ $d=\frac{6}{61}$. La segunda derivada de f es:

$$f''(d)=\frac{-36\sqrt{2}}{5\left(72-12d+61d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La función $g(d)=72-12d+61d^2$ representa una parábola que abre hacia arriba, el discriminante de la ecuación $72-12d+61d^2=0$ es $144-17568<0$ por tanto, para todo valor de d, $72-12d+61d^2>0\Rightarrow f''\left(\frac{6}{61}\right)<0$ luego $d=\frac{6}{61}$ maximiza el área.

Solución 5 *Para el semicírculo, el área es también función del radio, el área será máxima cuando la distancia entre los puntos E y G sea máxima,* *las coordenadas de los puntos de tangencia sobre los ejes coordenados serán*

$$D : (d, 0), C : (0, d)$$

y las del centro $E : (d, d)$ *este punto pertenece a la recta* $y = 4 - \dfrac{4}{3}x$ *por tanto* $d = 4 - \dfrac{4}{3}d \Rightarrow d = \dfrac{12}{7}$, $E : \left(\dfrac{12}{7}, \dfrac{12}{7}\right)$ *Las coordenadas del punto* G *son de la forma* $\left(x, 4 - \dfrac{4}{3}x\right)$ *la distancia entre* E *y* G *es:*

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{\left(\frac{12}{7} - x\right)^2 + \left(\frac{12}{7} - 4 + \frac{4}{3}x\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{12}{7} - x\right)^2 + \left(\frac{4}{3}x - 4\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1225x^2 - 6216x + 8352}}{21} \end{aligned}$$

es la función objetivo, entonces, $g'(x) = \dfrac{2450x - 6216}{42\sqrt{1225x^2 - 6216x + 8352}} \Rightarrow$ $x = \dfrac{3108}{1225} \approx 2.54 \wedge y \approx 0.62$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{4900\left(1225x^2 - 6216x + 8352\right) - (2450x - 6216)^2}{84\left(1225x^2 - 9807x + 8352\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2286144}{84\left(1225x^2 - 9807x + 8352\right)^{\frac{3}{2}}} \\ g''\left(\frac{3108}{1225}\right) &= \frac{2286144}{84\left(1225\left(\frac{3108}{1225}\right)^2 - 9807\left(\frac{3108}{1225}\right) + 8352\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

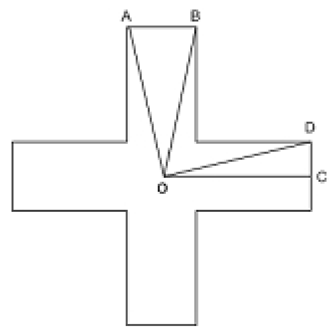
La segunda derivada en el punto extremo no permite decidir porque

$$1225\left(\frac{3108}{1225}\right)^2 - 9807\left(\frac{3108}{1225}\right) + 8352 < 0$$

$x \in [0, 3]$, *pero si* $x = 0 \vee x = 3$ *los semicírculos no quedarían inscritos en el triángulo.*

4. Se inscribe una cruz en una circunferencia de radio r ¿Cuales son las

dimensiones de la cruz para que su área sea máxima?



Solución 6 *Sea* $OC = x \wedge\ DC = y$, $OD = r$. $\measuredangle DOC = \theta$, *$O$ es el centro de la circunferencia, El área de la región delimitada por la cruz será:*

$$A(x,y) = 4xy + 4xy - (2y)^2 = 8xy - 4y^2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \ \wedge \ \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

$$\begin{aligned} A(x,y) &= 8xy - 4y^2 = \\ &= 8r\cos\theta r\sin\theta - 4r^2\sin^2\theta = \\ &= 8r^2\cos\theta\sin\theta - 4r^2\sin^2\theta = \\ &= 4r^2\left(2\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta\right) = \\ &= 4r^2\left(\sin 2\theta - \sin^2\theta\right) \end{aligned}$$

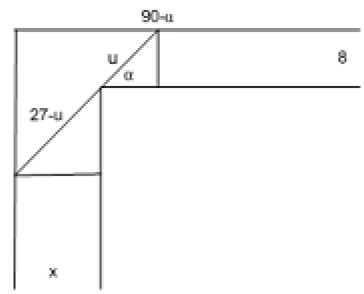
La función de área es una función del ángulo θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *es esta la función objetivo,* $A(\theta) = 4r^2\left(\sin 2\theta - \sin^2\theta\right) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= 4r^2(2\cos 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta) = \\ &= 4r^2(2\cos 2\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

Si $4r^2(2\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0 \Rightarrow 2\cos 2\theta - \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2 = \tan 2\theta$ *(Esta división es posible hacerla porque al pertenecer* θ *al intervalo* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos 2\theta \neq 0$*) De* $2 = \tan 2\theta$ *se tiene que* $\theta = \dfrac{\arctan 2}{2} \approx 31.72^\circ$ *Para verificar que este valor maximiza el área, se halla la segunda derivada de* $A(\theta)$. $A''(\theta) = -8r^2(\sin 2\theta + \cos 2\theta) \Rightarrow A''(31.72^\circ) = -8r^2(\sin 63.44^\circ + \cos 63.44^\circ) < 0$ *Las dimensiones de la cruz simétrica, que maximizan su área son entonces:* $x = r\cos 31.72^\circ \ \wedge \ y = r\sin 31.72^\circ$

5. Una viga de acero de 27 pies de longitud se transporta por un pasillo de 8 pies de ancho hasta un corredor perpendicular al pasillo. ¿Cuál debe ser

el ancho del corredor para que la viga pueda pasar por la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.



Solución 7 *De acuerdo al diagrama, y teniendo en cuenta que los triángulos rectángulos son semejantes, se puede afirmar que:*

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{8}{u} \wedge \sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{x}{27-u} \\
&\Rightarrow u = \frac{8}{\sin\alpha} \wedge x = (27-u)\cos\alpha \\
&\Rightarrow x = \left(27 - \frac{8}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha \\
&\Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = -\sin\alpha\left(27 - \frac{8}{\sin\alpha}\right) + \cos\alpha\left(8\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \\
&= 8 + 8\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 27\sin\alpha = \frac{8\sin^2\alpha + 8\cos^2\alpha - 27\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \\
&= \frac{8\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 27\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{8 - 27\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha}
\end{aligned}$$

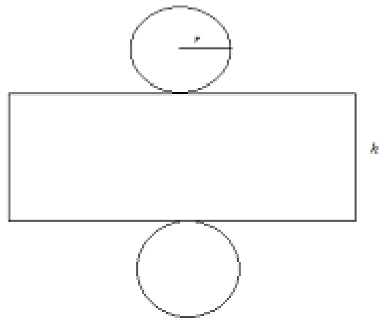
si

$$\begin{aligned}
8 - 27\sin^3\alpha &= 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3} \wedge \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \\
u &= 12 \wedge x = (27-12)\frac{\sqrt{5}}{3} = 11.18
\end{aligned}$$

El ancho mínimo del pasillo debe ser 11.18 pies.

6. Cuáles serán las dimensiones del cilindro circular recto de volumen $1000m^3$ si es destapado y se requiere que se minimize la cantida de material con

el cual se construirá.



Solución 8 *El volumen de cualquier cilindro circular, de altura h y radio de la base r, es* $\pi r^2 h$*. Para este cilindro se tiene que* $\pi r^2 h = 1000 m^3$*. En cualquier cilindro, el área superficial es la suma de las áreas de las dos caras circulares más el área de la superficie curva. La superficie curva tiene por área* $2\pi r h$ *ya que es un rectángulo de altura igual a la altura del cilindro y base* $2\pi r$ *que es la longitud de las circunferencias de las bases. La función a optimizar es el área total del cilindro, que al ser destapado será:*

$$2\pi r h + \pi r^2 = A_s\left(r, h\right)$$

Como

$$\pi r^2 h = 1000 m^3 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

de esta forma la función a optimizar depende sólo de r:

$$2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = A_s\left(r\right) = \frac{2000}{r} + \pi r^2$$

7. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de una caja en forma de paralelépipedo rectangular de base cuadrada, cuyo volumen es de $144 m^3$, si se requiere que el costo de construcción sea mínimo? El material que se usa para las dos tapas cuadradas tiene un costo de veinte pesos por metro cuadrado y el de los lados rectangulares treinta pesos.

Solución 9 *El volumen de cualquier paralelépipedo rectangular de base cuadrada (una caja como las de zapatos) es* $x^2 y$ *donde x es el lado del cuadrado de la base, y es la altura. Para esta caja el volumen es 144* m^3

$$x^2 y = 144$$

El área de la superficie de la caja es

$$2x^2 + 4xy$$

porque hay dos tapas cuadradas de lado x y cuatro lados rectangulares de base x y altura y El costo de construcción de la caja es

$$20 \times 2x^2 + 30 \times 4xy = 40x^2 + 120xy = C(x, y)$$

de $x^2y = 144$ se tiene que

$$y = \frac{144}{x^2} \Rightarrow C(x) = 40x^2 + 120x\frac{144}{x^2} = 40x^2 + \frac{17280}{x}$$

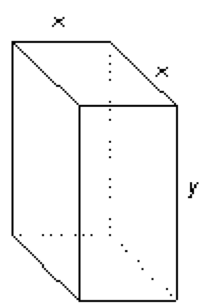
Es esta la función que debe optimizarse.

$$C'(x) = 80x - \frac{17280}{x^2} = \frac{80x^3 - 17280}{x^2}$$

Si $80x^3 - 17280 = 0 \Rightarrow x^3 - 216 = 0 \Rightarrow (x-6)\left(x^2 + 6x + 36\right) = 0$, como $x^2 + 6x + 36$ no se anula para ningún valor real, sólo es posible $x = 6$ $C''(x) = 80 + \dfrac{34560}{x^3} \wedge C''(6) = 80 + \dfrac{34560}{6^3} = 80 + 160 > 0$, 6 es un mínimo. Las dimensiones de la caja que minimizan los costos son $x = 6m$, $y = 4m$

8. Cuáles son las dimensiones del sólido rectangular con base cuadrada, de máximo volumen, de entre todos los que tienen un área de 50 unidades cuadradas.

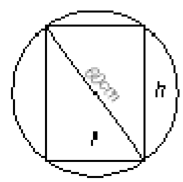
Solución 10 *Un sólido rectangular de base cuadrada es un paralelepípedo que tiene dos caras que son cuadrados, las bases,*



y las 4 restantes son rectángulos, el área superficial será la suma de las áreas de cada una de las caras, entonces, si x es la medida de los lados del cuadrado y x, y son las medidas de los lados de los rectángulos, el área superficial será: $S(x, y) = 2x^2 + 4xy$. Para este problema, $2x^2 + 4xy = 50, \Longrightarrow y = \dfrac{50 - 2x^2}{4x}$. el volumen de este tipo de sólido es $V(x, y) = x^2y \Longrightarrow$ para la situación que nos ocupa $V(x) = x^2\dfrac{50 - 2x^2}{4x} =$

$\dfrac{50x-2x^3}{4} = \dfrac{25x-x^3}{2}$. *Esta es la función que vamos a optimizar, por tanto* $V'(x) = \dfrac{25-3x^2}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *Se descarta el valor negativo, y se verifica si* $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,*maximiza la función de volumen, para ello se usará el criterio de la segunda derivada* $V''(x) = -3x, V''\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = -3\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = -5\sqrt{3} < 0$. *Se tiene que* $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *es un máximo, y* $= \dfrac{50-2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)} = 2.886\,8$.

9. Una viga de madera tiene sección rectangular de dimensiones l, h. Su resistencia S es directamente proporcional al cuadrado de su altura, h, y a su ancho, l. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco de 60cm de diámetro?



Solución 11

Por ser la resistencia de la viga directamente proporcional al cuadrado de su altura y a su ancho, se tiene que $S(l,h) = klh^2$, *donde* k *es una constante de proporcionalidad. Como la viga se cortará de un tronco de sección circular,* l *y* h *están relacionados mediante la ecuación* $l^2 + h^2 = 60^2 \Longrightarrow h^2 = 60^2 - l^2 \Longrightarrow S(l) = kl\left(60^2 - l^2\right)$.*La función a optimizar es por tanto* $S(l)$.

$$S'(l) = k\left(60^2 - l^2\right) - 2kl^2 = k\left(60^2 - 3l^2\right)$$

cuando $S'(l) = 60^2 - 3l^2 = 0 \Longrightarrow l^2 = \dfrac{60^2}{3} \wedge l = \dfrac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$ $S''(l) = -6kl$.*Esto indica que si la constante de proporcionalidad es positiva,* $S''(l) < 0$ *para cualquier valor de* l, *que necesariamente es un número positivo, luego el valor hallado es un máximo.*

$$h = \sqrt{60^2 - l^2} = \sqrt{60^2 - \frac{60^2}{3}} = 60\sqrt{\frac{2}{3}} = 20\sqrt{6}$$

Las dimensiones de la viga son $20\sqrt{6}$ *y* $20\sqrt{3}$

10. El alcance R de un proyectil lanzado con velocidad inicial v_0 y ángulo θ con relación a la horizontal es

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

donde g es la gravedad. Calcular el valor de θ que produce el máximo alcance.

Solución 12

$$\begin{aligned} R'(\theta) &= \frac{2v_0^2\cos 2\theta}{g} \; si \; R'(\theta)=0 \\ \cos 2\theta &= 0 \Rightarrow 2\theta = \cos^{-1}(0) \Rightarrow \theta = \frac{\cos^{-1}(0)}{2} \\ \theta &= 45^o \end{aligned}$$

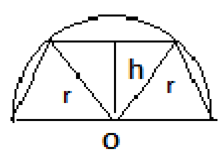
Que θ es un máximo es consecuencia de que

$$R''(\theta) = \frac{-4v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

y que el ángulo de tiro pertenece al intervalo cerrado $[0,90]$ rango en el cual el seno de un ángulo siempre es positivo.

11. Halle el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 20 cm teniendo la base inferior en el radio del semicírculo. (trapecio isósceles, base inferior 40 cm y base superior 20).

Solución 13



El área de cualquier trapecio es $\frac{(b_1+b_2)h}{2}$ para este trapecio, $b_1 = 40cm$, en el triángulo isósceles de lados formados por radios de la circunferencia, la altura h interseca a b_2 en su punto medio, por tanto,

$$\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + h^2 = r^2 \Rightarrow b_2 = 2\sqrt{r^2-h^2} = 2\sqrt{20^2-h^2}$$

el área de este trapecio será:

$$a(h) = \frac{\left(40+2\sqrt{20^2-h^2}\right)h}{2}$$

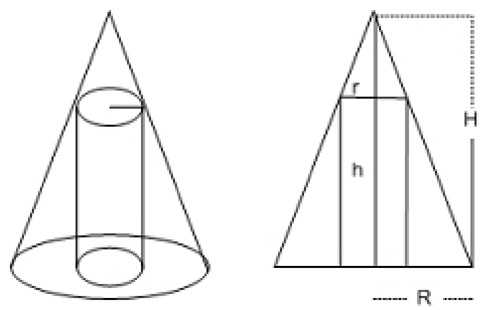
el área es función de la altura, derivando,

$$a'(h) = \frac{1}{2}\left(40+2\sqrt{20^2-h^2}+h(-2h)\left(20^2-h^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

para hallar el máximo valor de h, la derivada se iguala a cero, se resuelve la ecuación resultante para h. Con h se calcula el valor de b_2

12. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en en un cono circular recto de radio R y altura H.(radio: $\frac{2R}{3}$, altura: $\frac{H}{3}$)

Solución 14



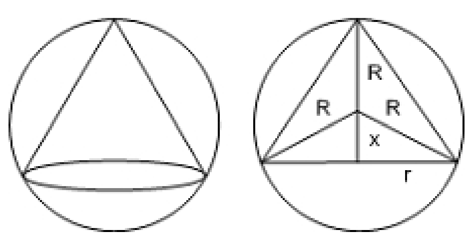
En el diagrama del lado derecho se puede observar una seccion del cono y el cilindro inscrito, obtenida al cortar el solido con un plano, perpendicular a la base, que pasa por el centro del círculo, el triángulo rectángulo de catetos r y H-h es semejante al triángulo rectángulo de catetos R y H, entonces, $\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h}$, *por tanto,* $r = R - \frac{R}{H}h$ *el volumen del cilindro inscrito es:*

$$\pi r^2 h = \pi \left(R - \frac{R}{H}h \right)^2 h$$

El volumen del cilindro es función de h,derivando esta función con respecto a h e igualando a cero, se obtiene lo pedido.

13. Hallar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede inscribirse en una esfera de radio R.

Solución 15



El diagrama del lado derecho representa una sección de la esfera y el cono inscrito, obtenido al cortar la esfera con un plano que pase por su centro, perpendicular a la base del cono, r es el radio de la base del cono, R es *el radio de la esfera y R+x es la altura del cono circular recto, por tanto,* $x = \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *Si h representa la altura del cono, entonces,*

$$h = R + \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

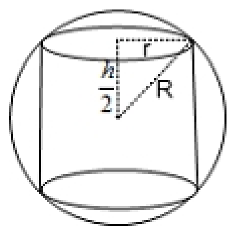
y el volumen del cono será:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(R + \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

derivando con respecto a r e igualando a cero, se obtiene lo pedido.

14. Dada una esfera de radio R, hallar las dimensiones del cilindro circular recto, de mayor superficie lateral $2\pi rh$ que puede inscribirse en la esfera.

Solución 16



El segmento perpendicular a la base del cilindro, trazado desde el centro de la circunferencia que forma la base del cilindro hasta el centro de la esfera, por consideraciones de simetría, debe tener una longitud igual a la mitad de la altura del cilindro, de acuerdo al diagrama,

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{h^2}{4} + r^2 \\ r^2 &= \frac{4R^2 - h^2}{4} \\ r &= \left(\frac{4R^2 - h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

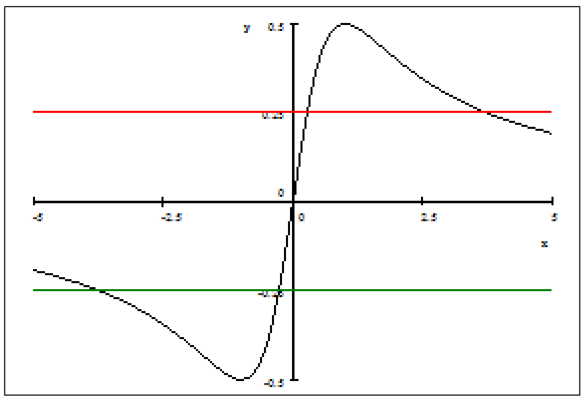
h: altura del cilindro, r: radio de la circunferencia de la base del cilindro, R: radio de la esfera. El área lateral del cilindro es:

$$\begin{aligned} 2\pi rh &= 2\pi \left(\frac{4R^2 - h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} h = \pi \left(4R^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} h \\ A(h) &= \pi \left(4R^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} h \end{aligned}$$

El área lateral es función de h, derivando con respecto a h e igualando a cero, se obtiene $h = R\sqrt{2}$.

15. Un cilindro se ha obtenido haciendo girar un rectángulo alrededor del eje x, tal que su base está en el eje x y todo el rectángulo está contenido en la región comprendida entre la curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ y el eje x. Halle las dimensiones del cilindro de máximo volumen posible y el correspondiente volumen.

Solución 17



La base del rectángulo está en el eje x, y todo el rectángulo está en la región determinada por la curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ y el eje x, por tanto, la recta paralela al eje x que determinará al cilindro, cortará a la curva en dos puntos distintos que tendrán la misma ordenada, sean a y b dos puntos distintos del dominio de la función para los cuales

$$\frac{a}{a^2+1} = \frac{b}{b^2+1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ab^2 + a &= a^2b + b \Rightarrow ab^2 - a^2b = b - a \\ &\Rightarrow ab\,(b-a) = b - a \Rightarrow ab = 1 \end{aligned}$$

lo que equivale a $b = \frac{1}{a}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a < b$, la altura del cilindro es: $b - a = \frac{1}{a} - a = \dfrac{1-a^2}{a}$ y el radio es: $\dfrac{a}{a^2+1} = \dfrac{b}{b^2+1} \Rightarrow$ el volumen del cilindro es:

$$\begin{aligned} V\,(a) &= \pi \left(\frac{a}{a^2+1}\right)^2 \left(\frac{1-a^2}{a}\right) = \\ &= \pi \frac{a-a^3}{a^2+1} \end{aligned}$$

$$V'\,(a) = -\pi \frac{a^4+4a^2-1}{(a^2+1)^2}$$

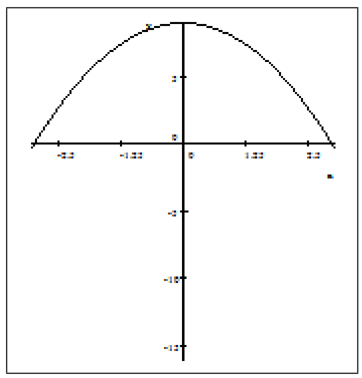
para resolver la ecuación bicuadrada $a^4 + 4a^2 - 1 = 0$ *se hace* $a^2 = s \Rightarrow s^2 + 4s - 1 = 0.$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

en $\mathbb{R}$, *no es posible* $a^2 = s = -2 - \sqrt{5}$ *luego* $a^2 = s = -2 + \sqrt{5}$; $a = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}} = \pm 0.485\,87 \ \wedge\ b = \pm\dfrac{1}{0.485\,87} = \pm 2.\,058\,2.$

16. Determine el área del rectángulo más grande que tenga dos vértices en el eje x y los otros dos en la parábola $y = 9 - x^2$, por encima del eje x. Ejercicio 29.

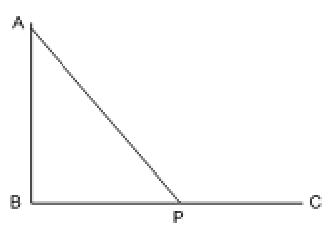
    Solución 18



    Al ser un rectángulo, los puntos que se buscan deben estar en la parábola y tener la misma ordenada, puesto que la parábola es simétrica con respecto al eje y los puntos deben ser de la forma $(-a, 9-a^2)$, $(a, 9-a^2)$, *la base del rectángulo está determinada por los puntos de coordenadas* $(-a, 0)$ *y* $(a, 0)$ *su longitud es* $2a$ *la altura es* $9 - a^2$ *el área es:* $2a\left(9-a^2\right)$ *derivando con respecto a a e igualando a cero, se obtiene lo pedido.*

17. Una isla esta ubicada en el punto A a 4 Km mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Una mujer, en la isla, desea ir al punto C, a 6 Km de B playa abajo, la mujer puede dirigirse hacia el punto P, entre B y C en un bote de remos a 5 Km por hora y después caminar en forma recta de P a C a 8 Km por hora. Encuentre la ruta de A a C que ella puede recorrer en el menor tiempo.

    Solución 19



Al ser B el punto más cercano desde A a la playa, el segmento $\overline{AB}$ será perpendicular a la playa, sea x la distancia de B a P entonces, $AP = \left(16 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y el tiempo que se empleará en recorrer esta distancia, remando a $5km/h$, será $t_1 = \dfrac{\left(16 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{5km/h}$, la distancia de P a C es $6 - x$ y al caminar esta distancia a $8km/h$ el tiempo empleado será $t_2 = \dfrac{6 - x}{8km/h}$ el tiempo total será: $\dfrac{\left(16 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{5km/h} + \dfrac{6 - x}{8km/h}$ el tiempo depende del valor de x, derivando con respecto a x e igualando a cero, se obtiene lo pedido.