FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

CALCULO I

SEGUNDO PARCIAL JR 2019-10

INSTRUCCIONES:	a)	Duración: 100 minutos.
	b)	La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
	c)	Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente

Ejercicio 1.-[1.0 puntos]

Obtenga las asíntotas oblicuas y verticales y trace una gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{4x^2}{x-2}$$

Ejercicio 2.-[1.50 puntos]

Determine los valores de la constante a, tales que la función f sea continua en 3 si:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < 3 \\ a^2 - x^2 + x & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Ejercicio 3.-[1.0 puntos] Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - x \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 2}$$

Ejercicio 4.-[1.5 puntos]

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{2x}$$

J. Rodriguez

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL

SOLUCIÓN

JR 2019-10

Ejercicio 1.
Probemos si $x = 2$ es una asíntota vertical

a) $\lim_{x \to 2^+} \frac{4x^2}{x-2} = \frac{16}{0^+} = +\infty$ b) $\lim_{x \to 2^-} = \frac{4x^2}{x-2} = \frac{16}{0^-} = -\infty$

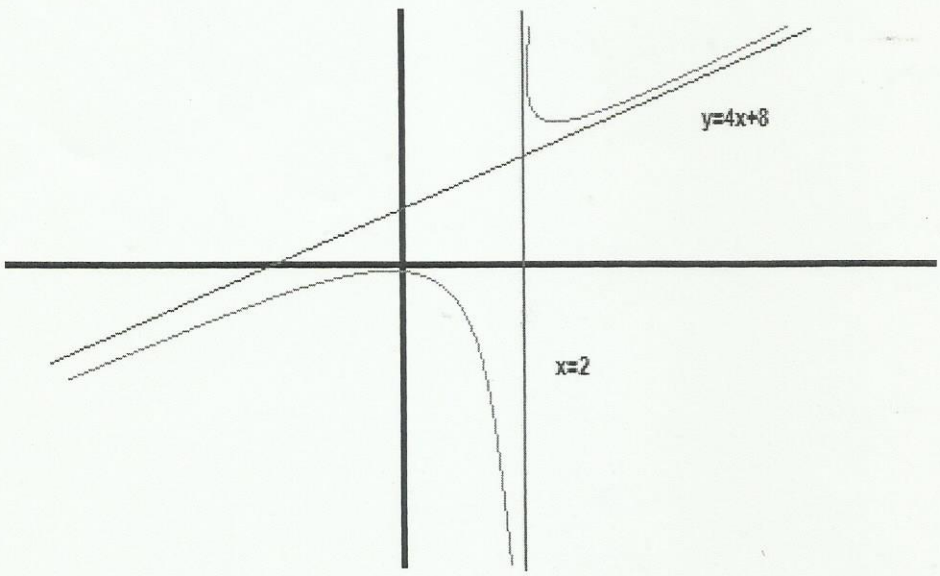
Por lo tanto $x = 2$ es una asíntota vertical.

La función f tiene asíntota oblicua ya que el grado de $4x^2$ es un grado mayor que $x - 2$, digamos $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{1 - \frac{2}{x}} = 4$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 4x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4x^2}{x-2} - 4x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 8x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{x-2} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{1 - \frac{2}{x}} = 8$$

Por lo tanto $x = 2$ es un asíntota vertical y $y = 4x + 8$ es una asíntota oblicua. Como $f(0) = 0$ y $f(x) < 0$ para $x \neq 0$ y $x < 2$, se tiene que la gráfica de la función es



J. Rodriguez

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL

JR 2009-10

Ejercicio 2.

Para que f sea continue en $x=3$, el $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe y es igual a $f(3)=a^2-6$. Primero hallemos los limites laterales

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(a^2-x^2+x) = a^2-9+3 = a^2-6$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(ax+1) = 3a+1$$

como el $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe, se tiene que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, así que

$$a^2-6=3a+1$$

Luego $a^2-3a-7=0$. Por lo tanto $a=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$, $a=\dfrac{3-\sqrt{37}}{3}$

Ejercicio 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - x\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos x - 2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen} x-(1-\cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x - 2(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen} x-(1-\cos 2x)(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x - 2(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x\operatorname{sen} x-(1-\cos 2x)(1+\cos x)}{x^2}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - 2(1-\cos x)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen} x}{x}-\dfrac{(1-\cos 2x)}{x^2}(1+\cos x)}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}-2\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}}$$

$$= \frac{-1-(-\frac{1}{2})2}{1-2(-\frac{1}{2})} = \frac{-1+1}{1+1} = 0$$

J. Rodriguez

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL

JR 2019-10

Ejercicio 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{2x}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{sen}x)-(1-\operatorname{sen}x)}{2x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\operatorname{sen}x)}{2x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}$$

$$=1\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo Parcial (28/03/2019)
Cálculo I

HM

Nombre:________________________________ Código:________________

No se permite el uso de ningún tipo de apuntes, libros o calculadoras graficadoras. Cualquier dispositivo electrónico, en particular su celular, debe permanecer apagado durante el examen. No acatar estas órdenes será motivo de anulación del examen.

Nota: Para obtener el máximo puntaje en cada pregunta, además de tener la respuesta correcta, **usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta**.

1) **(1 punto)** Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

2) **(1 punto)** Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3^{2x}-3^{-2x}}{3^{2x}+3^{-2x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)}{1-\cos(x)}$

3) **(1.5 puntos)** Halle los valores de las constantes a y b de tal manera que la función

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x<2,\\ ax^2-bx+3, & \text{si } 2\le x<3,\\ 2x-a+b, & \text{si } x\ge 3,\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

4) **(1.5 puntos)** Verifique mediante propiedades trigonométricos y de límites, que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\operatorname{sen}(x),$$

5) **(0.25 puntos)** Use el teorema de compresión o del emparedado para mostrar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4\operatorname{sen}(1/x)}{x^2+1}=0.$$

6) **(0.25 puntos)** Suponga que f es una función continua en el intervalo cerrado $[1,5]$ y que las únicas soluciones de la ecuación $f(x)=6$ son $x=1$ y $x=4$. Si $f(2)=8$ explique por qué $f(3)>6$.

Recuerde que:

- $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)\pm\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)$
- Si f es una una función continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ para el cual $f(a)\neq f(b)$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=N$.
- Sea $c\in[a,b]$. Si f, g y h son funciones definidas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ (excepto quizás en el punto c) tales que $g(x)\le f(x)\le h(x)$ para todo $x\in[a,b]$ (excepto quizás en el punto c), y

$$\lim_{x\to c} g(x)=\lim_{x\to c} h(x)=L,$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$.

AM

1) a. Primero que todo observen que

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-3)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x-3}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = -4.$$

b) Multiplicando y dividiendo por el conjugado de $\sqrt{x^2+5}-3$, se tiene que

$$\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)\,(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\,(x+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

AM

2) a) Note que

$$\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{3^{2x}+3^{-2x}}=\frac{\cancel{3^{-2x}}(3^{4x}-1)}{\cancel{3^{-2x}}(3^{4x}+1)}=\frac{3^{4x}-1}{3^{4x}+1}$$

Entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{3^{2x}+3^{-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{4x}-1}{3^{4x}+1}=-1.$$

b) Dado que

$$\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{1-\cos x}=\frac{\cos x\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x}{\cos x\,(1-\cos x)}$$

$$=\frac{-\operatorname{sen}x\,\cancel{(1-\cos x)}}{\cos x\,\cancel{(1-\cos x)}}=-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x},$$

se sigue que

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{1-\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=0.$$

3) Note que

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2.$$

Entonces, $\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2^-}x+2=2.$

4M

Quiere decir que si nos aproximamos a 2 por la derecha, se debe satisfacer que

$$2 = 4a - 2b + 3$$

$$4a - 2b = 1 \qquad (1)$$

para que f sea una función continua en 2. Ahora, para que sea continua en 3, se debe satisfacer

$$9a - 3b + 3 = 6 - a + b$$

$$10a - 4b = 3. \qquad (2)$$

Tomando (1) y (2),

$$\begin{array}{r} -8a + 4b = -2 \\ 10a - 4b = 3 \\ \hline 2a \quad \cancel{\ } = 1 \end{array}$$

$$a = 1/2$$

Reemplazando $a = 1/2$ en (1) se tiene que

$$2 - 2b = 1$$

$$b = 1/2.$$

Por lo tanto, para que f sea continua a y b deben ser igua a $1/2$.

4) $$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cosh - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= -\cos x \frac{(1 - \cos h)}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Recordando que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(1 - \cos h)}{h} = 0$ y $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 0,$

HM

se sigue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\cos x \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)}{h}$$

$$-\operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= -\operatorname{sen} x.$$

5) Dado que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$$

$$-\frac{x^4}{x^2+1} \leq \frac{x^4}{x^2+1} \operatorname{sen}(1/x) \leq \frac{x^4}{x^2+1},$$

y $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1/x^2 + 1/x^4} = 0,$

se sigue por el teorema de compresión que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+1} = 0$$

6) Supongamos que $f(3) < 6$. Dado que

$$f(2) = 8 > 6 > f(3),$$

se sigue por el teorema del valor intermedio que exis un $c \in [2,3]$ tq $f(c) = 6$. Esto contradice el hecho de que las únicas soluciones $f(x) = 6$ son $x = 1, 5$. Por lo tanto se debe cumplir $f(3) \geq 6$.

Segundo Parcial de Cálculo 1, Fila B

Marzo de 2019

BB

Nombre:____________________________**Código:** __________

Observaciones: La duración del examen es de **85 minutos**. El uso de dispositivos electrónicos y calculadoras durante el examen es causal de anulación del parcial.

1. (**2 puntos**) Calcule: $a)$ $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$, donde $f(x)=\sqrt{6x+4}$.

   $b)$ $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\tan^3(2\theta)}{4\theta^3}$.

2. Sea $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-6x+8}$. Calcule:

   (a) (**0.7 puntos**) todos los puntos de discontinuidad de f y clasifíquelos en evitables o inevitable.

   (b) (**0.8 puntos**) todas las asintotas lineales de f.

3. Sea

$$f(x)=\begin{cases} (x+4)(x+5), & \text{si } x<0, \\ 5b, & \text{si } x=0, \\ \dfrac{(2x+5)^2-25}{x}, & \text{si } x>0. \end{cases}$$

   (a) (**1.0 puntos**) Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   (b) (**0.5 puntos**) Determine el valor de la constante b para que f sea continua en $x=0$.

BB

Solución y Rúbrica del segundo parcial

1

a) $f(x)=\sqrt{4x+5}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overset{0.2}{\sqrt{4(1+h)+5}}-\overset{0.2}{\sqrt{4(1)+5}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+4h+5}-\sqrt{9}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+4h}-3}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+4h}+3}{\sqrt{9+4h}+3} \quad \leftarrow 0.2$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{9+4h})^2-3^2}{h(\sqrt{9+4h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{9}+4h-\cancel{9}}{h(\sqrt{9+4h}+3)} \quad \leftarrow 0.2$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{9+4h}+3)}=\frac{4}{\sqrt{9+0}+3}=\frac{4}{3+3}=\boxed{\frac{2}{3}} \quad \leftarrow 0.2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(4x)}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^2(4x)}{\cos^2(4x)}}{\frac{x^2}{1}} \quad \leftarrow 0.2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(4x)}{x^2\cos^2(4x)} \quad \leftarrow 0.2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2(4x)}$$

$$=\frac{1}{2}(4)^2\cdot\frac{1}{\cos^2(0)}=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{1}{1}=\boxed{8} \quad \leftarrow 0.2$$

0.4

2

$$f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$$

a) $x^2-6x+5=0 \iff (x-5)(x-1)=0 \iff x=5,\ x=1.$
Luego f es discontinua en los puntos $x=5$ y $x=1$. $\leftarrow 0.3$

Ahora:

$$\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x(x^2-1)}{(x-5)(x-1)}=\lim_{x\to 5}\frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-5)\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{5(6)}{0},$$

lo cual indica que el límite no existe ya que, por ejemplo, $\lim_{x\to 5^+}f(x)=\frac{5(6)}{0^+}=+\infty$.
En consecuencia la discontinuidad de f en $x=5$ es inevitable. $\leftarrow 0.2$

BB

Ahora

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x+1)}{x-5} = \frac{1(1+1)}{1-5} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2},$$

lo cual indica que este límite existe. Por tanto la discontinuidad de f en $x=1$ es evitable. ← 0.2

b) Asíntotas verticales (a.v.):

$$x^2-6x+5=0 \iff (x-5)(x-1)=0 \Rightarrow x=5,\ x=1.$$

0.4 → En la parte a) encontramos que $\lim_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$ y por tanto $x=5$ es una a.v.

Como $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, $x=1$ no es a.v.

Luego $x=5$ es la única a.v. para la gráfica de f.

Ahora, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, f no tiene asíntotas horizontales.

0.4 → Asíntotas oblicuas (a.o.):

$$f(x) = \frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x-5)\cancel{(x-1)}} = \frac{x^2+x}{x-5} \Rightarrow \begin{array}{r|l} x^2+x & x-5 \\ \hline -x^2+5x & x+6 \\ 6x & \\ -6x+30 & \\ \hline 30 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ $y=x+6$ es la a.o. para la gráfica de f.

BB

3 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(3x+2)^2-4}{x}, & \text{si } x<0, \\ 4a, & \text{si } x=0, \\ (x+3)(x+4), & \text{si } x>0. \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{(3x+2)^2-4}{x}$ ← 0.2

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{9x^2+12x+\cancel{4}-\cancel{4}}{x}$ ← 0.2

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(9x+12)}{\cancel{x}} = 0+12 = \boxed{12.}$ ← 0.2

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+3)(x+4) = 3\cdot 4 = \boxed{12.}$ ← 0.2

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{12.}$ ← 0.2

b) Para que f sea continua en $x=0$ debe cumplirse que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Como $f(0)=4a$,

$4a = 12$ ← 0.3

$a = \dfrac{12}{4}$

$\boxed{a=3.}$ ← 0.2

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO I

Nombre:______________________________Marzo 20 de 2.019

ATB
Duración del parcial: 90 minutos AAAAA

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos *II*, *III* y *IV* para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

(*I*) **Valoración 2.0 pts.** Seleccione la única opción correcta (*N.A.* significa ninguna de las anteriores).

1. El
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$
es igual a
(*a*) 5 (*b*) −4 (*c*) 3 (*d*) *N.A.*

2. La gráfica de la función racional $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$ posee la asíntota horizontal
(*a*) $y=4$ (*b*) $y=-3$ (*c*) $y=-8$ (*d*) *N.A.*

3. El
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tan^3(3x)}$$
es igual a
(*a*) $\frac{1}{27}$ (*b*) $\frac{2}{15}$ (*c*) $\frac{-3}{8}$ (*d*) *N.A.*

4. La función $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ es discontinua en el punto
(*a*) $x=-1$ (*b*) $x=2$ (*c*) $x=1$ (*d*) *N.A.*

(*II*) **Valoración 1.0 pt.** Use el teorema de compresión o del emparedado para calcular el límite
$$\lim_{x\to 0}x^2cos(20\pi x).$$

(*III*) **Valoración 1.0 pt.** Dada la función $f(x)=\begin{cases}sen(x), & x\leq -\dfrac{\pi}{2}\\ a.sen(x)+b, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 2.cos(x), & x\geq \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Determinar a y b de modo que la función $f(x)$ sea continua para todo valor de x.

(*IV*) **Valoración 1.0 pt.** Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la función $f(x)=x^6-3x-1$ tiene un cero real en $[1,2]$.

ATO

- Use el teorema de compresión o del emparedado para calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos(20\pi x).$$

Desarrollo

Tenemos que $-1 \leq \cos(20\pi x) \leq 1$. Al multiplicar esta desigualdad por x^2 y aplicar el teorema del emparedado se obtiene el resultado. Es decir,

$$-1 \leq \cos(20\pi x) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \cos(20\pi x) \leq x^2$$

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) \leq \lim_{x \to 0} x^2 \cos(20\pi x) \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \cos(20\pi x) \leq 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(20\pi x) = 0.$

ATB

• Dada la función $f(x)=\begin{cases} \operatorname{Sen} x, & x \leq -\pi/2 \\ a.\operatorname{Sen} x + b, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2\operatorname{Cos} x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$,

determine a y b de modo que la función $f(x)$ sea continua para todo valor de x.

Desarrollo

Existe duda de la continuidad en $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$. Luego:

$f(\pi/2)=0$, $\lim\limits_{x\to\pi/2^+} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/2^-} a\operatorname{Sen}x+b=a+b$.

Para que f sea continua en $\pi/2$ se debe cumplir que $a+b=0$.

Por otra parte,

$f(-\pi/2)=\operatorname{Sen}(-\pi/2)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\pi/2^+} f(x)=-a+b$ y $\lim\limits_{x\to-\pi/2^-} f(x)=-1$.

Para que f sea continua en $-\dfrac{\pi}{2}$ se debe cumplir que $-a+b=-1$.

Al resolver el sistema $\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=-1 \end{cases}$, tenemos que su solución es

$a=1/2$ y $b=-1/2$.

Por lo tanto, para $a=1/2$ y $b=-1/2$ tenemos que la función f es continua para todo valor de x.

ATB

• Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la función $f(x) = x^6 - 3x - 1$ tiene un cero real en $[1, 2]$.

Desarrollo.

Es claro que la función f es continua sobre el intervalo $[1, 2]$. Además $f(1) = -3$ y $f(2) = 57$. Así que por el teorema del valor intermedio existe un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Lo anterior demuestra que la función f posee un cero real en el intervalo $[1, 2]$.

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO I

Nombre:____________________________________ Marzo 20 de 2.019

ATB
CCCCC

Duración del parcial: 90 minutos

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos II, III y IV para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

(I) **Valoración 2.0 pts.** Seleccione la única opción correcta ($N.A.$ significa ninguna de las anteriores).

1. El
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$$
es igual a
(a) 5 (b) $\frac{6}{5}$ (c) $-\frac{2}{5}$ (d) $N.A.$

2. La gráfica de la función racional $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$ posee la asíntota horizontal
(a) $y = 4$ (b) $y = -3$ (c) $y = -8$ (d) $N.A.$

3. El
$$\lim_{x\to 0} \frac{tan^2(4x)}{1-cos(5x)}$$
es igual a
(a) $-\frac{32}{25}$ (b) $\frac{32}{15}$ (c) $\frac{32}{25}$ (d) $N.A.$

4. La función $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ es discontinua en el punto
(a) $x = -1$ (b) $x = 2$ (c) $x = 1$ (d) $N.A.$

(II) **Valoración 1.0 pt.** Use el teorema de compresión o del emparedado para calcular el límite
$$\lim_{x\to 0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right).$$

(III) **Valoración 1.0 pt.** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ln(x), & 0 < x < 1 \\ ax^2+b, & 1 \le x < \infty \end{cases}$
Si $f(2) = 3$, determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua.

(IV) **Valoración 1.0 pt.** Use el teorema del valor intermedio para mostrar que la ecuación $x^4 + x - 3 = 0$ posee una solución en el intervalo $(1, 2)$.

- Use el teorema de compresión o del emparedado para calcular el límite $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Desarrollo

Tenemos que $-1 \leq \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, para $x \neq 0$. Al multiplicar esta desigualdad por x^2 y aplicando el teorema del emparedado se obtiene el resultado. Es decir,

$$-1 \leq \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) \leq \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

Entonces, $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

ATB

• Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ ax^2 + b, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$

Si $f(2) = 3$, determine los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua.

Desarrollo.

El punto sobre el cual existe duda de la continuidad de f es $x = 1$.

Así que analicemos la continuidad de f en dicho punto.

Tenemos que $f(1) = a + b$. Además,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} ax^2 + b = a + b$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln x = 0$.

Luego, los dos límites laterales son iguales sii $a + b = 0$.

Así que f es continua en $x = 1$ sii $a + b = 0$ (1)

Por otro lado, $f(2) = 4a + b = 3$. (2)

Así que de (1) y (2) planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4a + b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 1$ y $b = -1$.

Por lo tanto, los valores de a y b para que f sea continua son $a = 1$ y $b = -1$.

ATB

• Use el teorema del valor intermedio para mostrar que la ecuación $x^4+x-3=0$ posee una solución en el intervalo $(1,2)$.

Desarrollo.

Consideremos la función $f(x)=x^4+x-3$ sobre el intervalo cerrado $[1,2]$. Cláramente f es continua en dicho intervalo. Además, $f(1)=-1$ y $f(2)=15$. Así que por el teorema del valor intermedio existe un $c\in(1,2)$ tal que $f(c)=c^4+c-3=0$.

Lo anterior demuestra que la ecuación $x^4+x-3=0$ posee una solución en el intervalo $(1,2)$.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

PARCIAL II - CALCULO I 22 DE MARZO DE 2019 DV√

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre Completo ____

1. [**2.0 pts.**] Determine el valor de los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x-\tan x}{2x^3}\right)$

   b) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

   c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}\right)$

   d) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)$

2. [**1.0 pts.**] Encuentre los valores de a y b que hagan f continua en todas partes. **Justifique su respuesta**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<1\\ 2ax+b+1, & 1\leq x<2\\ \dfrac{ax}{2}-b+3 & x\geq 2\end{cases}$$

3. [**1.0 pts.**]Encuentre las asíntotas verticales y asíntotas horizontales de la siguiente función (en caso que existan) utilizando límites.

$$f(x)=\frac{3x^2+2x-16}{x^2+5x-14}$$

4. [**1.0 pts.**] Si $\mid g(x)+4\mid\leq 2(3-x)^4$, aplique el teorema de compresión o del emparedado y calcule:

$$\lim_{x\to 3} g(x)$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

PARCIAL II - CALCULO I 22 DE MARZO DE 2019 DV

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre Completo ____________________

1. [**2.0 pts.**] Determine el valor de los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x - \tan x}{4x^3}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}\right)$

   d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)$

2. [**1.0 pts.**] Encuentre los valores de p y q que hagan f continua en todas partes. **Justifique su respuesta**

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x<1 \\ 2px+q+1, & 1\le x<2 \\ \dfrac{px}{2}-q+3 & x\ge 2 \end{cases}$$

3. [**1.0 pts.**] Encuentre las asíntotas verticales y horizontales (en caso que existan) utilizando límites.

$$f(x) = \frac{3x^2+2x-16}{x^2+5x-14}$$

4. [**1.0 pts.**] Si $\mid g(x)+4 \mid \le 2(3-x)^4$, aplique el teorema de compresión o del emparedado y calcule:

$$\lim_{x\to 3} g(x)$$

Solucionario - Parcial II

22 Marzo 2019

DV

1) límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x - \tan x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x - \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{2x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x \cos x - \operatorname{sen}x}{2x^3 \cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x (\cos x - 1)}{2x^3 \cos x} \cdot \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x (-\operatorname{sen}^2 x)}{2x^3 \cos x (\cos x + 1)}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos x (\cos x + 1)}$

$= (1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{4}}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(\sqrt{x}+1)}$

$= -\lim_{x\to 1} \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

c) $\lim_{x\to \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} =$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sea } u = x - \frac{\pi}{3} \\ \text{Si } x \to \pi/3,\ u \to 0 \end{array}}$

$\lim_{u\to 0} \frac{1 - 2\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right)}{\pi - 3\left(u + \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{1 - 2\left(\cos u \cos \pi/3 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \pi/3\right)}{-3u}$

$= \lim_{u\to 0} \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2}\cos u - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} u\right)}{-3u} = \lim_{u\to 0} \frac{1 - \cos u + \sqrt{3}\operatorname{sen} u}{-3u}$

$= \lim_{u\to 0} \left(-\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{1 - \cos u}{u}\right) - \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} u}{u}\right] = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(0 - \sqrt{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}\left(\dfrac{(2+x)(2-x)}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\dfrac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}\right)$ DV

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(2+x)(2-x)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(2+x)(2-x)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(2+x)(2-x)(3+\sqrt{x^2+5})}{(2+x)(2-x)}$

$= \lim_{x\to 2} 3+\sqrt{x^2+5} = 3+\sqrt{4+5} = \boxed{6}$

2)

$\lim_{x\to 1^+} 2ax+b+1 = 2a+b+1$

$\lim_{x\to 1^-} x^2+2 = 3$

luego $2a+b+1=3$

$\boxed{2a+b=2}$ ①

$\lim_{x\to 2^+} \frac{ax}{2}-b+3 = a-b+3$

$\lim_{x\to 2^-} 2ax+b+1 = 4a+b+1$

luego $a-b+3=4a+b+1$

$\boxed{3a+2b=2}$ ②

Solucionemos ahora el sistema

$\begin{cases} 2a+b=2 & ① \\ 3a+2b=2 & ② \end{cases}$

De ① $b=2-2a$, sustituyendo en ②:

$3a+2(2-2a)=2$

$3a+4-4a=2$

$-a=-2$

$\boxed{a=2}$

luego de ①:

$2(2)+b=2$

$\boxed{b=-2}$

3) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-16}{x^2+5x-14}$

DV

$f(x) = \dfrac{(3x+8)(x-2)}{(x+7)(x-2)}$

$f(x) = \dfrac{3x+8}{x+7}$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$

esto es, $\boxed{y=3}$ es asíntota horizontal.

- si $x+7=0 \rightarrow x=-7$,

$\lim_{x\to -7^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to -7^-} f(x) = -\infty$

esto es, $\boxed{x=-7}$ es asíntota vertical.

4) $|g(x)+4| \leq 2(3-x)^4$

$-2(3-x)^4 \leq g(x)+4 \leq 2(3-x)^4$ (propiedad de valor absoluto)

$-4-2(3-x)^4 \leq g(x) \leq 2(3-x)^4-4$

$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} 2(3-x)^4-4 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} -4-2(3-x)^4$

$= -4 \qquad\qquad = -4$

$\therefore \boxed{\lim_{x\to 3} g(x) = -4}$