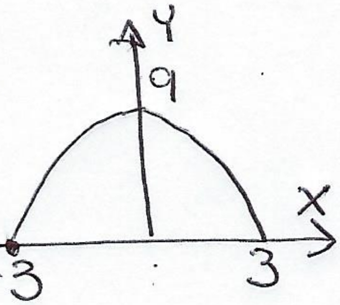
A

Solución - Examen final 29/05/2018.

I.



En este caso $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x+y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$. Los puntos de corte de la parábola con el eje x son $(-3,0)$ y $(3,0)$. $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 1 - 2x$.

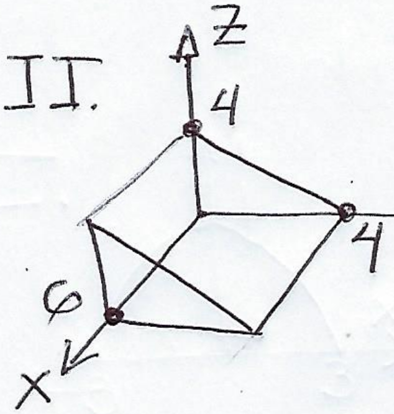
$$\int_C 2xy\,dx + (x+y)dx = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{9-x^2}(1-2x)\,dy\,dx = \int_{-3}^{3}(y-2xy)\Big|_0^{9-x^2} dx$$

$$= \int_{-3}^{3}(9-18x-x^2+2x^3)\,dx = \left(9x-9x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_{-3}^{3} = 36.$$

Rúbrica: 5 puntos: Puntos de corte y derivadas parciales.
5 puntos: Plantear bien las integrales.
5 puntos: Resolver correctamente las integrales.

A

II.



$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = e^{z} + e^{z} + e^{z} = 3e^{z}$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_Q \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

$$= \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{4-y} 3e^{z}\,dz\,dy\,dx = \int_0^6 \int_0^4 \left(3e^{z}\right)\Big|_0^{4-y} dy\,dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^4 \left(3e^{4-y} - 3e^{0}\right) dy\,dx = \int_0^6 \int_0^4 3\left(e^{4-y} - 1\right) dy\,dx$$

$$= 3\int_0^6 \left(-e^{4-y} - y\right)\Big|_0^4 dx = 3\int_0^6 \left((-e^{0} - 4) - (-e^{4-0} - 0)\right) dx$$

$$= 3\int_0^6 \left((-1-4) + e^{4}\right) dx = 3\int_0^6 \left(-5 + e^{4}\right) dx$$

$$= 18\left(-5 + e^{4}\right) \cong 892.8.$$

Rúbrica: 5 puntos: Hallar la divergencia
5 puntos: plantear bien las integrales.
5 puntos: Resolver correctamente las integrales.

A

III. $z = g(x,y) = 8 - 4x - y$

$G(x,y,z) = z - g(x,y) = 4x + 4y + z - 8$

$\vec{\nabla} G = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + \hat{k}$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2y\hat{k}$$

$(\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{\nabla} G = -4 - 4 + 2y = 2y - 8.$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS = \iint_R (\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{\nabla} G\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} (2y - 8)\, dy\, dx = \int_0^2 (y^2 - 8y)\Big|_0^{2-x} = \int_0^2 (-12 + 4x + x^2)\, dx$$

$$= -\frac{40}{3} \cong -13.3$$

Rúbrica: 5 puntos: Hallar el rotacional.
10 puntos: Plantear bien las integrales.
5 puntos: Resolver correctamente las integrales.