Tiempo máximo 90 minutos.

1. Hallar el trabajo W realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (2x + e^{-y}, 4y - xe^{-y})$ a la largo de la curva $y = x^4$, desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$. (Recuerde que $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$)

   Solución_**a)**. El campo $\mathbf{F} = (2x + e^{-y}, 4y - xe^{-y})$=$(M, N)$, es conservativo porque $M_y = -e^{-y} = N_x$. entonces existe una función potencial ϕ tal que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x + e^{-y}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 4y - xe^{-y}$, resolviendo para ϕ estas ecuaciones tenemos que $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2 + xe^{-y}$. Aplicando el teorema fundamental para integrales de linea tenemos.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla\phi \cdot \mathbf{dr} = \phi(1,1) - \phi(0,0) = 3 + e^{-1}$$

   Solución_**b).** El campo $\mathbf{F} = (2x + e^{-y}, 4y - xe^{-y})$=$(M, N)$, es conservativo porque $M_y = -e^{-y} = N_x$. entonces el trabajo W es independiente de la trayectoria por la tanto se puede tomar cualquier trayectoria que una los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, por ejemplo podemos tomar la linea recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. una parametrizacion para esta recta es $r(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

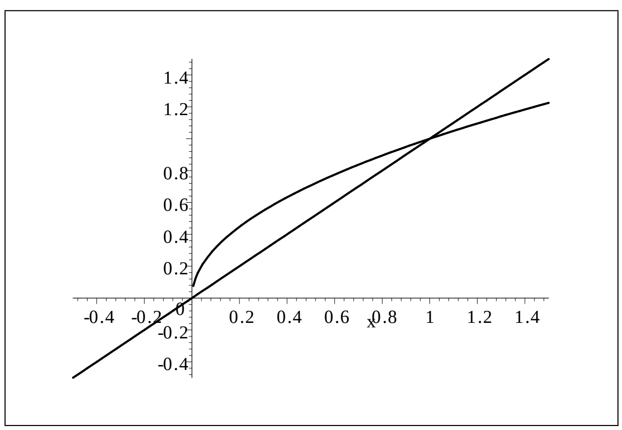
$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^1 \left(2t + e^{-t} + 4t - te^{-t}\right) dt = 3 + e^{-1}$$

2. Calcular

$$\int_C \left(\cos y + x^2\right) dx + (2xy - x \sin y)\, dy$$

   Donde C es la frontera de la región comprendida entre las graficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.

   Solucion. La curva es cerrada.



   por lo tanto podemos aplicar el teorema de Green, $M = \cos y + x^2$, $N = 2xy - x \sin y$

$$\begin{aligned} \int_C \left(\cos y + x^2\right) dx + (2xy - x \sin y)\, dy &= \iint_R (N_x - M_y)\, dA = \iint_R 2y dA \\ &= \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 2y dy dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. Utilizar el teorema de la divergencia para hallar el flujo

$$\iint\limits_{S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$$

Donde $\mathbf{F} = (\cos z + xy^2, xe^{-z}, \sin y + x^2 z)$ y S es la frontera del sólido limitado por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

Solucion. Como la superficie es cerrada podemos aplicar el teorema de la divergencia.

$$\iint\limits_{S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} F dV = \iiint\limits_{V} \left(x^2 + y^2\right) dV$$

Escribiendo la integral en cordenadas cilindricas tenemos que

$$\iiint\limits_{V} \left(x^2 + y^2\right) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} r^3 dz dr d\theta = \frac{243}{2}\pi = 121,5\pi$$

4. Utilizar el teorema de Stokes para calcular la integral de linea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

Donde $\mathbf{F} = (x^2, 4x, 4z^2)$ y C es la interseccion de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con los planos coodenados en el primer octante, recorrida en el sentido contrario a las manecillas del reloj cuando es vista desde el lado positivo del eje z

Solución. Aplicando el teorema de Stokes, sea $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \iint\limits_{s} \operatorname{curl} F \cdot dS = \iint\limits_{R} (0, 0, 4) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dA \\
&= \iint\limits_{R} 4 dA = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi
\end{aligned}$$

Donde la región R es la proyeccion del octavo de esfera sobre el plano xy, es decir un cuarto de circulo de radio, $r = 1$.

Criterios de Calificacion:

1. Graficas 20%
2. Planteamiento del problema 50%
3. Solución de las integrales 30%.