

Departamento de Matemáticas

Solución Examen final B de Ecuaciones Diferenciales

20 de noviembre de 2019

Nombre: _____ Profesor: _____

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de **90 minutos**.
- El uso y/o posesión de cualquier tipo de celular y/o calculadora durante el examen es causal de anulación.

1. [2.2 pts]

a) [0.4 pts] Evalúe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 40e^{-4t} & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 40e^{-4(t-\pi)} + 40e^{-4t} & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$

Solución.Primero escribimos $f(t)$ en términos de la función escalón unitario:

$$f(t) = 40e^{-4t} + 40e^{-4(t-\pi)}\mathcal{U}(t-\pi).$$

Aplicando el segundo teorema de traslación en el segundo término de la suma, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 40\mathcal{L}\{e^{-4t}\} + 40e^{-\pi s}\mathcal{L}\{e^{-4t}\} \\ &= \frac{40}{s+4} + \frac{40}{s+4}e^{-\pi s}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{40}{s+4} + \frac{40}{s+4}e^{-\pi s}. \quad (1)$$

Valoración

- Escribe correctamente la función en términos de la función escalon unitario: (0.2 pts)
- Calcula correctamente la transformada: (0.2 pts)

b) [1.8 pts] Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s+4)(s^2+4s+20)}e^{-\pi s}\right\}$.

Solución. Primero encontremos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s+4)(s^2+4s+20)}\right\}.$$

Para este propósito, hagamos la descomposición parcial de la fracción dada:

$$\frac{20}{(s+4)(s^2+4s+20)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+20}.$$

Quitando denominadores y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} 20 &= A(s^2 + 4s + 20) + (Bs + C)(s + 4) \\ &= (A + B)s^2 + (4A + 4B + C)s + 20A + 4C. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$A + B = 0, \quad (2)$$

$$4(A + B) + C = 0, \quad (3)$$

$$20A + 4C = 20. \quad (4)$$

De (2) y (3) vemos que $C = 0$. Sustituyendo este último valor en (4), obtenemos que $A = 1$. Se sigue entonces de (2) que $B = -1$. En consecuencia,

$$\frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} = \frac{1}{s + 4} - \frac{s}{s^2 + 4s + 20}.$$

Esta expresión es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} &= \frac{1}{s + 4} - \frac{s}{(s^2 + 4s + 4) + 16} \\ &= \frac{1}{s + 4} - \frac{s}{(s + 2)^2 + 16} \\ &= \frac{1}{s + 4} - \frac{s+2-2}{(s + 2)^2 + 16} \\ &= \frac{1}{s + 4} - \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 16} + \frac{1}{2} \frac{4}{(s + 2)^2 + 16}. \end{aligned}$$

Aplicando el primer teorema de traslación en los dos últimos términos, conseguimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 4} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 16} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{(s + 2)^2 + 16} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 4} \right\} - e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 16} \right\} + \frac{1}{2} e^{-2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s^2 + 16} \right\} \\ &= e^{-4t} - e^{-2t} \cos 4t + \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 4t. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} \right\} = e^{-4t} - e^{-2t} \cos 4t + \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 4t. \quad (5)$$

Ahora, aplicando el segundo teorema de traslación, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} e^{-\pi s} \right\} &= \mathcal{U}(t - \pi) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} \right\} \Big|_{t \rightarrow t - \pi} \\ &= \mathcal{U}(t - \pi) (e^{-4t} - e^{-2t} \cos 4t + \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 4t) \Big|_{t \rightarrow t - \pi} \\ &= \mathcal{U}(t - \pi) \left[e^{-4(t - \pi)} - e^{-2(t - \pi)} \cos 4(t - \pi) + \frac{1}{2} e^{-2(t - \pi)} \sin 4(t - \pi) \right] \\ &= \mathcal{U}(t - \pi) \left[e^{-4(t - \pi)} - e^{-2(t - \pi)} \cos 4t + \frac{1}{2} e^{-2(t - \pi)} \sin 4t \right]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{20}{(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} e^{-\pi s} \right\} = \mathcal{U}(t - \pi) \left[e^{-4(t - \pi)} - e^{-2(t - \pi)} \cos 4t + \frac{1}{2} e^{-2(t - \pi)} \sin 4t \right]. \quad (6)$$

Valoración

- Descompone correctamente $\frac{20}{(s+4)(s^2+4s+20)}$ en fracciones parciales : (0.6 pts)
- Calcula correctamente la transformada de Laplace inversa de cada fracción usando el primer teorema de traslación: (0.6 pts)
- Calcula correctamente la transformada de Laplace inversa de cada fracción usando el segundo teorema de traslación: (0.6 pts)

2. [1.0 pts] Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) = \cos 3t + 9 \int_0^t y(\tau) \cos 3(t-\tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Solución.

Primero escribimos el término integral usando la fórmula de convolución. Esto es,

$$y'(t) = \cos 3t + 9(\cos 3t * y(t)).$$

Usando el teorema de la transformada de la derivada, el teorema de convolución y la fórmula para la transformada del coseno, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 3t\} + 9\mathcal{L}\{\cos 3t * y(t)\} \\ \mathcal{L}\{y'(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 3t\} + 9\mathcal{L}\{\cos 3t\}\mathcal{L}\{y(t)\} \\ sY(s) - y(0) &= \frac{s}{s^2+9} + \frac{9s}{s^2+9}Y(s) \\ sY(s) - \frac{9s}{s^2+9}Y(s) &= 1 + \frac{s}{s^2+9} \\ \left(s - \frac{9s}{s^2+9}\right)Y(s) &= 1 + \frac{s}{s^2+9} \\ \left(\frac{s^3+9s-9s}{s^2+9}\right)Y(s) &= 1 + \frac{s}{s^2+9} \\ \left(\frac{s^3}{s^2+9}\right)Y(s) &= 1 + \frac{s}{s^2+9} \\ Y(s) &= 1 \cdot \left(\frac{s^2+9}{s^3}\right) + \frac{s}{s^2+9} \cdot \left(\frac{s^2+9}{s^3}\right) \\ Y(s) &= \frac{s^2}{s^3} + \frac{9}{s^3} + \frac{s}{s^3} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{9}{2s^3} + \frac{1}{s^2} \\ y(t) &= 1 + t + \frac{9}{2}t^2. \end{aligned}$$

Valoración

- Escribe correctamente la integral como una convolución: (0.2 pts)
 - Calcula correctamente la transformada de Laplace de la ecuación usando teorema de convolución para el término integral: (0.3 pts)
 - Simplifica y encuentra la solución: (0.5 pts)
3. [1.8 pts] Un masa de 2 kg. estira un resorte 1/2 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a ocho veces la velocidad instantánea. Si la fuerza en el inciso 1a) actúa sobre la masa, encuentre la ecuación del movimiento (esto es, plantee el problema de valor inicial y encuentre su solución). Tome $g = 10m/s^2$.

Solución.

Primero planteamos el problema de valor inicial correspondiente. Sea $x(t)$ la posición de la masa en el tiempo t .

- a) $m = 2, \text{ kg}$,
- b) $s = \frac{1}{2} \text{ mts}$,
- c) $x(0) = 0, x'(0) = 0$,
- d) $\beta = 8$,
- e) $f(t) = 40e^{-4t} + 40e^{-4(t-\pi)}\mathcal{U}(t - \pi)$.

Podemos obtener la constante del resorte usando la relación:

$$k = \frac{W}{s} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40.$$

La fórmula que modela este problema viene dada por

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}, \\ x(0) = x_0, x'(0) = x_1. \end{cases}$$

Luego reemplazando los valores y simplificando, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 20x = \frac{1}{2}(40e^{-4t} + 40e^{-4(t-\pi)}\mathcal{U}(t - \pi)), \\ x(0) = 0, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvamos este problema de valor inicial con la transformada de Laplace. En efecto, por (1) y las fórmulas de transformada de derivadas, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''\} + 4\mathcal{L}\{x'\} + 20\mathcal{L}\{x\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{40e^{-4t} + 40e^{-4(t-\pi)}\mathcal{U}(t - \pi)\} \\ s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4[sX(s) - x(0)] + 20X(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{40}{s+4} + \frac{40}{s+4}e^{-\pi s}\right) \\ s^2X(s) + 4sX(s) + 20X(s) &= \frac{20}{s+4} + \frac{20}{s+4}e^{-\pi s} \\ (s^2 + 4s + 20)X(s) &= \frac{20}{s+4} + \frac{20}{s+4}e^{-\pi s} \\ X(s) &= \frac{20}{(s+4)(s^2 + 4s + 20)} + \frac{20}{(s+4)(s^2 + 4s + 20)}e^{-\pi s}. \end{aligned}$$

Usando (5) and (6), tenemos que

$$x(t) = e^{-4t} - e^{-2t} \cos 4t + \frac{1}{2}e^{-2t} \sin 4t + \mathcal{U}(t - \pi) \left[e^{-4(t-\pi)} - e^{-2(t-\pi)} \cos 4t + \frac{1}{2}e^{-2(t-\pi)} \sin 4t \right].$$

Valoración

- Obtiene correctamente los datos del problema: (0.5 pts)
- Plantea correctamente el problema: (0.4 pts)
- Resuelve correctamente el problema de valor inicial usando transformada de Laplace : (0.9 pts)