Solución modelo A

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{(-5)^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{(-5)^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$

ya que ambas series convergen.

Además $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{(-5)^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-3}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-3}{5}\right)\cdot\left(\frac{-3}{5}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{-3/5}{1+3/5}=-3/8$$

Por otra parte $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$=2-\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}=2-0=2.$$

En conclusión:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{(-5)^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right)=-3/8+2=\frac{13}{8}$$

2. $$\int_1^{+\infty}3xe^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b 3xe^{-x}dx$$

Al calcular por partes la integral $\int 3xe^{-x}dx$

tenemos:

$$\int 3xe^{-x}dx=-3(xe^{-x}+e^{-x})+C=\frac{-3(x+1)}{e^x}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=-e^{-x}\end{array}}$$

Es decir

$$\int_1^{+\infty} 3xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-3(x+1)}{e^x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-3(b+1)}{e^b} + \frac{6}{e}\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-3(b+1)}{e^b} + \frac{6}{e}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-3}{e^b} + \frac{6}{e} \quad (\text{Por L'Hôpital})$$

$$= 0 + \frac{6}{e} = \frac{6}{e}$$

Dado que la integral $\int_1^{+\infty} 3xe^{-x}$ converge,

entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 3ne^{-n}$ converge.

3. $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^3}\right| \cdot \left|\frac{n^3}{(-1)^{n-1}x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}|x|$$

$= |x|$, si $x \neq 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$ es absolutamente convergente para todo $|x|<1$ con $x\neq 0$.

Dado que en $x=0$ la serie también es

absolutamente convergente, tenemos que
para todo $x \in (-1,1)$ la serie es absoluta-
mente convergente y por lo tanto con-
vergente. Entonces $R = 1$.

En $x = -1$ la serie se transforma en

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^3}$$ la cual es convergente.

En $x = 1$ la serie se transforma en

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3},$$ la cual por el criterio de
convergente.
la serie alterna es

En conclusión el intervalo de conver-
gencia es $[-1, 1]$.

4. $f(x) = e^{3x} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = 3e^{3x}$ $\quad f'(0) = 3$

$f''(x) = 3^2 e^{3x}$ $\quad f''(0) = 3^2$

$\vdots$ $\quad\quad \vdots$

$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$ $\quad f^{(n)}(0) = 3^n$

$$\Rightarrow e^{3x} = 1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$$

Solución modelo B.

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-2)^n}{5^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{5^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+1)}$$ ya que ambas convergen.

En efecto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}=\frac{-2/5}{1+2/5}=-\frac{2}{7}$$ y

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1}\right)=3-\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1}=3-0=3.$$

En conclusión:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-2)^n}{5^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)=-\frac{2}{7}+3=\frac{19}{7}.$$

2. $$\int_1^{+\infty}2xe^{-x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b 2xe^{-x}\,dx$$

Al calcular por partes la integral $\int 2xe^{-x}dx$

tenemos:

$$\int 2xe^{-x}dx=2\int xe^{-x}dx=-\frac{2(x+1)}{e^x}+C$$

$u=x \qquad dv=e^{-x}$
$du=dx \qquad v=-e^{-x}$

Es decir:

$$\int_1^{+\infty} 2xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{2(x+1)}{e^x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{2(b+1)}{e^b} + \frac{4}{e}\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-2(b+1)}{e^b} + \frac{4}{e}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{2}{e^b} + \frac{4}{e} \quad \text{(Por L'Hôpital)}$$

$$= 0 + \frac{4}{e} = \frac{4}{e}$$

Dado que la integral $\int_1^{+\infty} 2xe^{-x}dx$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2ne^{-n}$ converge.

3. $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^3}\right| \cdot \left|\frac{n^3}{(-1)^n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}\cdot|x|$$

$= |x|$, si $x \neq 0$.

Entonce la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^3}$ es absolutamende convergente para todo $|x|<1$ con $x\neq 0$.

Dado que en $x=0$ la serie también es absolutamente convergente, entonces es absolutamente convergente para todo $x \in (-1, 1)$.

Por lo tanto la serie converge para $x \in (-1, 1)$ y $R = 1$.

En $x = 1$ la serie se transforma en

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$ la cual converge por el criterio de la serie alterna.

En $x = -1$ la serie se transforma en

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$ la cual es convergente.

En conclusión el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

4. $f(x) = e^{2x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad f'(0) = 2$

$f''(x) = 2^2 e^{2x}$ $\qquad f''(0) = 2^2$

$\vdots$ $\qquad\qquad \vdots$

$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$ $\qquad f^{(n)}(0) = 2^n$

$$\Rightarrow e^{2x} = 1 + \frac{2}{1!} x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$