UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Ph.D. Edgardo Álvarez

Taller 1

3 de septiembre de 2019

1. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) $\sin(y') - y' = x + 3$.

   b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 + \ln x$.

   c) $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + x^2y = 0$.

   d) $u_{ttt} + au_{xx} = 0$.

2. Determine la región R donde el PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

   garantiza la existencia y unicidad de soluciones, donde f es la función:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{1+y^2}{\sqrt{x^2-9}}$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y}}$.

   d) $f(x,y) = \ln(x^2-y^2)$.

   e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1-x}{y-x}}$.

   f) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-y}}$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones homogéneas.

a) $(2x^2 + y^2)dx - x^2dy = 0$.

b) $(3y^2 + 4xy - x^2)dx - (2x^2 + 2xy)dy = 0$.

c) $(x^3 - x^2y - 10xy^2 - 3y^3)dx + (3xy^2 + 7x^2y)dy = 0$.

d) $(3x^3 - 3x^2y - 6xy^2 - y^3)dx + (xy^2 + 5x^2y)dy = 0$.

e) $[4x\cos(y/x) - 3x\sin(y/x) - y]dx + xdy = 0$.

f) $x(2y^4 - x^4)\dfrac{dy}{dx} = y(y^4 - x^4)$.

g) $(x^2y - xy^2 + y^3)dx + (x^3 + x^2y + xy^2)dy = 0$.

h) $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$.

i) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$.

j) $(x + y\sin(y/x))\,dx - x\sin(y/x)dy = 0$.

k) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$.

l) $(4x^2 - xy + y^2)dx + (x^2 - xy + 4y^2)dy = 0$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando una sustitución conveniente.

a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$.

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$.

e) $xy' = y\ln(xy)$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{6}{x^2 - 1}y = \dfrac{3(x + 1)}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1}}y^{2/3}$.

b) $\dfrac{dy}{dx} + 2(\cot x)y = 4(\cos x)y^{1/2}$.

c) $(2x^2y^2\ln x - y)dx + x\ln x\,dy = 0$.

d) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{(x\sin x + \cos x)^2}y^{-1}$.

e) $-2\dfrac{dy}{dx} + (\ln x)y = \ln x\left[\dfrac{2}{x} + (\ln x)^2\right]y^3$.

f) $\dfrac{dz}{dx} - (2\tan x)z = z^2$.

g) $\dfrac{dz}{dx} - (2\csc x + \cot x)z = (\csc^2 x)z^2$.

h) $(x^2 + 1)\sqrt{y}\dfrac{dy}{dx} = xe^{3x/2} + (1 - x^2)y\sqrt{y}$.

i) $6(x^2 + 1)y^2\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 + 2y^3 = 0$.

6. Halle la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

   a) $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}+2y=(x+1)^2, \quad y(0)=1.$

   b) $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3y^4, \quad y(1)=0{,}5.$

   c) $\cos y\, dx+(1+e^{-x})\sin y\, dy=0, \quad y(0)=\frac{\pi}{4}.$

   d) $\dfrac{dy}{dx}=(-2x+y)^2-7, \quad y(0)=0.$

   e) $\dfrac{dy}{dx}=\cos(x+y), \quad y(0)=\frac{\pi}{4}.$

   f) $ydx+x(\ln x-\ln y-1)dy=0, \quad y(1)=e.$

7. La ecuación
$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^2+B(x)y+C(x)$$
es llamada una **Ecuación de Riccati**. Suponga que se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación. Demuestre que la sustitución
$$y=y_1+\frac{1}{v}$$
transforma la ecuación de Ricatti en la ecuación lineal
$$\frac{dv}{dx}+(B+2Ay_1)v=-A.$$
Use este método para resolver

   a) $\dfrac{dy}{dx}+y^2=1+x^2.$

   b) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=1+x^2+y^2.$

8. Diga (no resuelva) de que tipo son las siguientes ecuaciones diferenciales (cada una es de dos tipos, por ejemplo lineal y homogénea).

   a) $\dfrac{dy}{dx}=3(y+7)x^2.$

   b) $\dfrac{dy}{dx}=xy^3-xy.$

   c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+2y^2}{4xy}.$

   d) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+3y}{y-3x}.$

   e) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy+2x}{x^2+1}.$

   f) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{y}-y}{\tan x}.$

9. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $(xy-1)dx+(x^2-xy)dy=0.$

b) $(y^2 + 2xy)dx - x^2 dy = 0$.

c) $(2xy + 2y^3)dx + (3x^2 + 10xy^2)dy = 0$.

d) $(y + \cos^2 x)dx + (\frac{3}{2}x + xy + \frac{1}{2}\sin x \cos x)dy = 0$.

e) $(xy - y)dx + (x^2 - 2x + y)dy = 0$.

f) $2y\,dx + (1 - \ln y - 2x)dy = 0$.

g) $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2 dy = 0$.

1) Demuestre que no son exactas.
2) Halle un factor integrante.
3) Halle la solución general en cada caso.

10. Las siguientes ecuaciones diferenciales tienen un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^a y^b$. Halle los valores exactos de a y b. Halle la solución general.

a) $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$.

b) $(3x^4y - 2x^2y^3)dx - (4x^3y^2 + 2x^2y^2)dy = 0$.