Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 2

14 de septiembre de 2019

1. Se encuentra un cadaver a medianoche y se registra que el cuerpo tiene una temperatura de 31°C. Una hora más tarde, la temperatura del cuerpo es de 29°C. Suponga que la temperatura del aire circundante permanece constante a 21°C. ¿A qué hora murió la víctima?. Use el hecho que la temperatura de un humano vivo es aproximadamente de 37°C.
Resp/ 9:54 pm aprox.

2. Suponga que una cerveza fría a 40°F está ubicada en un cuarto que tiene una temperatura de 70°F. Suponga que 10 minutos después, la temperatura de la cerveza es de 48°F. Encuentre la temperatura 25 minutos después de que la cerveza fuera ubicada en el cuarto.
Resp/ 56,18°**F**

3. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20°C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90°C si se sabe que la temperatura aumentó 2°C en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98°C?
Resp/ 145.7 segundos.

4. Dos grandes tanques A y B del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques A y B se mantienen a 0°C y a 100°C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 100°C, se sumerge dentro del tanque A. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de 90°C. Después de 2 minutos se saca la barra del tanque A e inmediatamente se transfiere al tanque B. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura de la barra se eleva 10°C.¿Cuánto tiempo, medido desde el inicio de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los 99,9°C?
Resp/ $t \approx 9{,}02$ **minutos.**

5. Una tanque de 120 galones contiene inicialmente 90 libras de sal disueltas en 90 galones de agua. Salmuera que contiene 2 lib/gal de sal fluye al tanque a una razón de 4 gal/min, y bien mezclada sale del tanque a una razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal hay en el tanque cuando éste está lleno?
Resp/ $240 - \frac{90^4}{120^3} \approx 202$ **libras.**

6. Un tanque contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra solución salina que tiene $c_{\mathrm{e}}(t) = 2 + \sin(t/4)\,\frac{\mathrm{lib}}{\mathrm{gal}}$ entra al tanque a una velocidad de

3 gal/min y sale a razón 2 gal/min. Halle la ecuación que expresa la cantidad de sal que hay en el tiempo t, $x(t)$.

7. Un tanque contiene 500 galones de una solución de agua salada que contiene 0.05 libras de sal por galón de agua. Agua pura es vertida en el tanque y drena en el fondo del tanque de modo que el volumen permanece constante. ¿A qué razón **R** gal/min debería ser vertida el agua el tanque para tener una concentración de sal **C** de 0.01 lib/gal en una hora?
   Resp/ $\mathbf{R} = \frac{25}{3}\ln 5$.

8. Suponga que el Lago Erie tiene volumen de 480 km^3. La razón de entrada del Lago Huron al Lago Erie es de 350 km^3 por año. La razón de salida del Lago Erie al lago Ontario es la misma. En el tiempo ($t = 0$ en años), la concentración del contaminante del Lago Erie-causado por el paso de contaminantes industriales es cinco veces la del lago Huron. Si el flujo de salida está perfectamente mezclado en el agua del lago, ¿cuánto tiempo tomará en reducir la concentración de contaminantes en el Lago Erie a dos veces la del Lago Huron?
   Resp/ $t = \frac{480}{350}\ln 4$ **años.**

9. Considere dos tanques A y B de tal manera que el tanque B está debajo del tanque A. El tanque A contiene 100 galones de una solución en la cual están disueltas 20 libras de sal. El tanque B contiene 200 galones de una solución en la cual están disueltas 40 libras de sal. Agua pura fluye al tanque A a una razón de $5\frac{\text{gal}}{\text{seg}}$. La solución sale del tanque A a razón de $5\frac{\text{gal}}{\text{seg}}$ y fluye inmediatamente al tanque B a la misma razón. La solución sale del tanque B a una razón de $5\frac{\text{gal}}{\text{seg}}$. ¿Cuánto de sal hay en el tanque B después de un minuto?
   Resp/ la cantidad de sal en el tanque B en el tiempo t **está dada por** $y(t) = -40e^{-t/20} + 80e^{-t/40}$**, por lo tanto después de un minuto hay 15.9 libras aprox.**

10. Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se han disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto.

    a) ¿Cuál es el volumen después de 20 minutos?
    b) ¿Cuál es el tiempo de vaciado del tanque?
    c) Determine la función que da la cantidad de sal en cada instante.
    d) ¿Cuánta cantidad de sal hay en el tanque después de 20 minutos? ¿Cuál es la concentración en este instante?

    Resp/ a) 80 litros, b) t=100 litros, c) $x(t) = 100 - t - 80(1 - \frac{t}{100})^8$**.**

11. En los siguientes problemas determine si existe un intervalo centrado en $x = 0$ para el cual el PVI tiene solución única. En el caso de que si exista, especifique cuál es.

    a) $(x-2)y'' + 3y = x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
    b) $y'' + (\tan x)y = e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
    c) $x^2y'' + 3xy' + 2y = x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

12. En los siguientes problemas determine si las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo I que se indica. Forme la solución general de la ecuación diferencial.

a) $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad y_1 = \cos(\ln x),\ y_2 = \sin(\ln x), \quad I = (0, \infty).$

b) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1 = x,\ y_2 = x^{-2},\ y_3 = x^{-2}\ln x, \quad I = (0, \infty).$

c) $-6x^3y''' - 7x^2y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x,\ y_2 = x^{1/2},\ y_3 = x^{1/3}, \quad I = (0, \infty).$

d) $y^{(4)} + y'' = 0, \quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x, \quad I = (-\infty, \infty).$

13. En los siguientes ejercicios la función dada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea dada. Use al fórmula de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

a) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0, \quad y_1 = x + 1.$

b) $x^2y'' - xy' - 3y = 0, \quad y_1(x) = x^3.$

c) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$

d) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x + 3)\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad y_1(x) = e^x.$

e) $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x.$

f) $y'' + (\tan x)y' - 6\left(\cot^2 x\right)y = 0, \quad y_1(x) = 2\sin^3 x.$

g) $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0, \quad y_1(x) = x^4.$

h) $(x^4 + x^2)y'' - (x^3 - x)y' - 4y = 0, \quad y_1(x) = x^2.$

i) $y'' - (2\tan x)y' + 3y = 0, \quad y_1(x) = \sin x.$

j) $(x\sin x + \cos x)\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x\cos x)\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, \quad y_1(x) = x.$

k) $(x^2 + 1)^2y'' - 4x(x^2 + 1)y' + 6(x^2 - 2)y = 0, \quad y_1(x) = x^2 + 1.$

l) $(x^2 - 3)^2y'' - 4x(x^2 - 3)y' + (6x^2 + 6)y = 0, \quad y_1(x) = 3x - x^3.$

m) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad y_1(x) = x.$

n) $x(x + 2)y'' - (3x + 8)y' + \dfrac{4x + 12}{x}y = 0, \quad y_1(x) = x^2.$

ñ) $(x^2 + 4)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x^2 - 4.$