Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 4-2019-2

30 de octubre de 2019

1. Evalúe

   a) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$.
   b) $\mathcal{L}\{e^{3t}(9 - 4t + 10 \sin \frac{t}{2})\}$.
   c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$.
   d) $\mathcal{L}\{(t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$.
   e) $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)\}$.
   f) $\mathcal{L}\{\sin t\, \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})\}$.
   g) $\mathcal{L}\{\cos t\, \mathcal{U}(t - \pi)\}$.

2. Evalúe

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$.
   b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$.
   c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}\right\}$.
   d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}e^{-3s}\right\}$.
   e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{13}{s(s^2+6s+13)}\right\}$.
   f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{13}{s(s^2-6s+13)}e^{-5s}\right\}$.
   g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\}$.
   h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)}e^{-2s}\right\}$.
   i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\}$.

j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+9)(s^2+16)}\right\}$.

3. Use la fórmula de la derivada de la transformada

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

para demostrar que

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\sin kt\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}.}$$

(Esta fórmula puede ser usada en los próximos ejercicios.)

4. Use la fórmula de la derivada de la transformada para evaluar

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s-3}{s+1}\right)\right\}$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)\right\}$.

5. Si suponemos que $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}$ existe y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, demuestre que

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du.}$$

Use esta fórmula para hallar la transformada de

a) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

b) $f(t) = \dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$.

6. Use el teorema de convolución en su forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

para demostrar que

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{\sin kt - kt\cos kt}{2k^3}.}$$

7. Resuelva el PVI dado.

a) $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1. \end{cases}$$

b) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

c) $y'' - 2y' + y = te^t \sin t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

8. *a*)
   - Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{3}{s} - \dfrac{6}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -3 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$
   - Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6))}\right\} = 1 - e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t).$
   - Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)}\cos\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1) - \sqrt{2}e^{-2(t-1)}\sin\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1).$
   - Resuelva el PVI

     $$x'' + 4x' + 6x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

     donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

   b)
   - Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$
   - Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\} = 1 - e^{-t}.$
   - Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1).$
   - Resuelva el PVI

     $$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

     donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

   c)
   - Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -2 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$
   - Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1).$
   - Resuelva el PVI

     $$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

     donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

9. Use únicamente argumentos de transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de masa-resorte. (Aceleración de la gravedad: 32 pies/s^2 o 10 m/s^2)

   a) Un peso de 10 newtons estira un resorte 5/3 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a cuatro veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa de $f(t) = 3 - 6\mathcal{U}(t-1)$ actúa sobre la masa. Encuentre la ecuación del moviemento.

   b) Una masa de un kilogramo estira un resorte 10/13 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 6 veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa de $f(t) = 13 - 26\mathcal{U}(t-5)$ actúa sobre la masa. Encuentre la ecuación del moviemento.

c) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32/5 pies y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 10 libras cuando la velocidad de la masa es 2 pies/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 3 \\ -5, & t \geq 3 \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

d) Una masa de 1 slug está unida a un resorte cuya constante es de 4 lb/pie. Al inicio la masa se libera del reposo desde la posición de equilibrio. El movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si una fuerza externa igual a

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

actúa sobre la masa.

e) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32 pies. Si el peso se libera a partir del reposo y desde la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

f) Una masa de 1/4 slug, cuando se une a un resorte, causa en éste un alargamiento de 8 pies y luego llega al punto de reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento $x(t)$ si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instanánea.

g) Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del resposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si una fuerza de

$$f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$

actúa sobre el sistema. Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento.

h) Resuelva el problema anterior si la fuerza aplicada en este caso es

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

i) Una fuerza de 10 newtons alarga 10 metros un resorte. Una masa de 1 kilogramo se une al extremo del resorte y se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s. Determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

j) Una masa que pesa 30 newtons estira un resorte 10 metros y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 4 N cuando la velocidad de la masa es 2 m/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ (en N) dada por

$$f(t) = \begin{cases} 72t, & 0 \leq t < 1 \\ 72, & t \geq 1 \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

k) Un resorte de 5 metros mide 25 metros de largo después de colocarle una masa que pesa 40 newtons. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 9 veces la velocidad instantánea. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ (en N) dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 60t - 60, & 1 \leq t < 2 \\ 120t - 180, & t \geq 2, \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

l) Una fuerza de 5 newtons alarga 20 centímetros un resorte. Un cuerpo de 50 newtons se une al extremo del resorte y se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 3 m/s^2. Encuentre la posición $x(t)$ del cuerpo si a este sistema se le ejerce una fuerza externa (en newtons) de

$$f(t) = -30(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) - 20\int_0^t x(\tau)(t-\tau)d\tau.$$

10. Determine la solución de las siguientes ecuaciones integrales e integro-diferenciales

a)

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \quad y(0) = 1.$$

b)

$$\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau = 6t^3.$$

c)

$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau)d\tau, \quad y(0) = 0.$$

d)

$$\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

e)

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\theta)d\theta = 1, \quad y(0) = 0.$$

f)

$$f(t) + \int_0^t f(y)(t-y)\,dy = t.$$

g)

$$t - 2f(t) = \int_0^t f(t-y)(e^y - e^{-y})\,dy.$$

h)

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$$

i)

$$f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (t-y)^3 f(y)\,dy.$$

j)

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

k)

$$f(t) = 2t - 4\int_0^t \sin\tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

l)

$$f(t) + 3\int_0^t f(y)\sin(t-y)\,dy = -3\int_0^t \sin(2y)\sin(t-y)\,dy.$$

m)

$$f(t) - 2\int_0^t f(y)\sin(2(t-y))dt = t - \cos t\,\mathscr{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

n)

$$f'(t) + 13\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x - 6\,f(t) = 13\,t + 13\,(t-2)\mathscr{U}\,(t-2)\,, \quad f(0) = 0.$$

ñ)

$$f'(t) + 18\int_0^t f(x)\,dx - 6\,f(t) = 18t + 18\,(t-3)\mathscr{U}\,(t-3)\,, \quad f(0) = 0.$$