Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Examen Final
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 03 de 2019

Nombre: ______________________ **Fecha:** __________

Observación:

- Recuerde que los ejercicios impares del texto guía (Dennis G. Zill, Warren S. Wrigth, Joel Ibarra, Matemáticas 2, Cálculo integral) tienen **respuesta.** Note también que algunos ejercicios que no son del texto guía también tienen respuesta (con la intención de que el estudiante adquiera confianza en su trabajo no se han escrito las respuestas de todos).
- Este taller es la base fundamental para el Examen Final y por lo tanto es un **deber su realización y presentación.**
- Los ejercicios marcados con **asterisco** tienen un mayor grado de complejidad y deben ser resueltos una vez realicen los ejercicios más sencillos.

Notación: En taller C denota convergente y D denota divergente.

Sucesiones

1. Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

   (a) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$. **Rta**: 5

   (b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ **Rta**: 0

   (c) $\left\{\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$ **Rta**: 0

   (d) $\left\{\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\right\}$ **Rta**: 0

   (e) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ **Rta**: e^2

   (f) $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ **Rta**: 0

   (g) $a_n = \frac{e^n}{n}$ **Rta**: D

   (h) $a_n = \frac{3-2n^2}{n^2-1}$ **Rta**: -2

2. Dada la sucesión $\left\{\frac{1-(1-1/n)^a}{1-(1-1/n)^b}\right\}$, donde a y b son constantes con $b \neq 0$, determine si la sucesión converge y halle su límite. **Rta**: $\frac{a}{b}$.

Series númericas

Series telescópicas y geométricas

3. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ **Rta**: $\frac{3}{4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$ **Rta**: 1

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ **Rta**: $\frac{1}{2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ **Rta**: C

(g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ **Rta**: C

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **Rta**: D

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **Rta**: 1

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ **Rta**: 5/2

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$ **Rta**: 1

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ **Rta**: C

(n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(n-1)(n-2)}$ **Rta**: $\frac{3}{2}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ **Rta**: 1

(p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n}$ **Rta**: $\frac{5}{2}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ **Rta**: D

(r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$ **Rta**: D

(s) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{3^k}$ **Rta**: $\frac{5}{2}$

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ **Rta**: D

(u) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ **Rta**: $\frac{e}{e-1}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$ **Rta**: $e-1$

4. Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ **Rta**: $-3 < x < 3$; $\frac{x}{3-x}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$ **Rta**: $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{1-4x}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$ **Rta**: $x \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{2-\cos x}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n 4$ **Rta**: $3 < x < 5$; $\frac{4-x}{x-5}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n}$ **Rta**: $-5 < x < -1$; $\frac{-2}{x+1}$

5. ¿Cuál es el valor de c si $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n} = 2$? **Rta**: $c = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

6. Encuentre el valor de c tal que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$. **Rta**: $c = \ln\frac{9}{10}$

7. Ecriba los siguientes decimales periódicos como cociente de dos enteros

   (a) $0,222222\ldots$

   (b) $3,393939\ldots$

   (c) $1,257257257\ldots$

   (d) $2,352235223522\ldots$

8. Una pelota se deja caer de una altura de 6 pies y empieza a rebotar. La altura de cada salto es de tres cuartos la altura del salto anterior. Encuentre la distancia vertical total recorrida por la pelota. **Rta**: 42 pies

9. Un objeto rueda 10 metros en el primer segundo. En cada segundo en que dura moviéndose rueda un 80 % de lo que rodó en el segundo anterior debido al fricción. ¿ cuán lejos rodará el objeto? **Rta**: 50 metros

10. Texto guía Página 182 Ejercicios: 11,13,15,17,19.

Criterio del término n-ésimo para divergencia y operaciones con series

11. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, calcular su suma.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{3}{2^n}\right)$ **Rta**: D

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^n+e^{-n})$ **Rta**: D

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)$ **Rta**: D

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n+2}$ **Rta**: D

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{5}{n(n+1)}\right)$ **Rta**: C

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{(-5)^n}+\frac{7}{(n+1)(n+2)}\right)$ **Rta**: C

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n}{(-2)^n}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}\right)$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{(-2)^{n+1}}+\ln\frac{n}{(n+1)}\right)$ **Rta**: D

Criterio de la integral

12. Usando el criterio de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ **Rta**: D

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ **Rta**: C

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$ **Rta**: C

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ **Rta**: C

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ **Rta**: D

    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\sqrt{n}}{n^3}$ **Rta**: C

    (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ **Rta**: C

    (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ **Rta**: C

    (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ **Rta**: D

    (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ **Rta**: C

    (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$ **Rta**: C

    (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+2)}$ **Rta**: D

13. Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ **Rta**: $p > 1$

    (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ **Rta**: $p > 1$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+1)^p$ **Rta**: $p < -1$

14. Encuentre todos los valores de c para los que converge la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \qquad \textbf{Rta} : c \leq 1$$

15. (∗) Para un cierto valor real k, la serie dada es convergente. Determinar k.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n^2+2k} - \frac{k}{n+1} \right). \qquad \textbf{Rta} : k = \frac{1}{2}$$

16. (∗) Para un cierto valor real k, la serie dada es convergente. Determinar k.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+4} - \frac{k}{3n+1} \right). \qquad \textbf{Rta} : k = 3$$

17. Texto guía Página 188 Ejercicios: 15,19,21,25.

Criterio de comparación directa y criterio de comparación con límite

18. Analice la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ **Rta**: C

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ **Rta**: C

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ **Rta**: C

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2+1}$ **Rta**: C

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$ **Rta**: C

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **Rta**: D

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$ **Rta**: D

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ **Rta**: C

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ **Rta**: C

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$ **Rta**: D

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **Rta**: C

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$ **Rta**: D

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ **Rta**: C

19. Texto guía Página 192 Ejercicios: 15,17,19,21,23,25,29,33.

Criterio de Leibniz o de la serie alternante

20. Analice la convergencia de las siguientes series.

(a) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \ldots$

(b) $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} + \ldots$ **Rta**: C

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)}$ **Rta**: C

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$ **Rta**: C

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ **Rta**: C

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ **Rta**: D

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$ **Rta**: C

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$ **Rta**: C

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$ **Rta**: D

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$ **Rta**: D

21. ¿Para qué valores de p es convergente la serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

22. Texto guía Página 201 Ejercicios: 7,9,11,13.

Convergencia absoluta, convergencia condicional y criterios de la razón y de la raíz

Notación: AC denotará absolutamente Convergente y CC denotará condicionalmente Convergente.

23. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$ **Rta**: AC

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)}$ **Rta**: CC

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ **Rta**: AC

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{n3^n}$ **Rta**: D

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ **Rta**: CC

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ **Rta**: CC

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k$ **Rta**: AC

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ **Rta**: AC

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ **Rta**: AC

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **Rta**: D

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n!}$ **Rta**: D

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$

24. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n.$$

Determine si $\sum a_n$ es convergente o divergente. **Rta**: D

25. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$.

Rta: (a) y (d).

26. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}.$$

27. (a) Demuestre que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para toda x.

    (b) Deduzca que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para toda x.

28. (a) Demuestre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

    (b) Deduzca que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

29. Aplicar la prueba de la razón, para deducir la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

30. Texto guía Página 202 Ejercicios: 17,19,21,23,25,31.

Series de potencias (Radios e intervalos de convergencia)

31. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. **Rta**: 1, $[-1,1)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$. **Rta**: 1, $[-1,1]$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **Rta**: ∞, $(-\infty,\infty)$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2x^n}{2^n}$. **Rta**: 2, $(-2,2)$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$. **Rta**: 3, $(-5,1)$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$. **Rta**: $\frac{1}{2}$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

(g) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln(n)}$. **Rta**: 4, $(-4, 4]$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$. **Rta**: $\frac{1}{3}$, $[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}]$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$. **Rta**: 1, $[1, 3]$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$. **Rta**: ∞, $(-\infty, \infty)$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n$, $b > 0$ **Rta**: b, $(a-b, a+b)$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$, **Rta**: ∞, $(-\infty, \infty)$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$.

32. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n. \qquad \textbf{Rta} : k^k$$

Series de Taylor y de Maclaurin

33. Si $f^n(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. **Rta**: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $R = 1$.

34. Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

(a) $f(x) = (1-x)^{-2}$. **Rta**: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $R = 1$

(b) $f(x) = \sin(\pi x)$. **Rta**: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

(c) $f(x) = e^{5x}$. **Rta**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$, $R = \infty$

(d) $f(x) = \sinh(x)$. **Rta**: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

(e) $f(x) = \ln(1+x)$

(f) $f(x) = \cos(3x)$

(g) $f(x) = xe^x$

(h) $f(x) = \cosh(x)$

35. Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1,\ a = 1.$ **Rta**:$-1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x - 1^4),\ R = \infty$

(b) $f(x) = e^x,\ a = 3.$ **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n,\ \ R = \infty$

(c) $f(x) = \cos(x),\ a = \pi.$ **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}(x-\pi)^{2n},\ \ R = \infty$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ a = 9.$ **Rta**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n 3^{2n+1} n!}(x-9)^n,\ \ R = 9$

(e) $f(x) = x - x^3,\ a = -2.$

(f) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = -3$

(g) $f(x) = \sin(x),\ a = \frac{\pi}{2}$

(h) $f(x) = x^{-2},\ a = 1.$

36. **Serie Binomial**. Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots,\quad (R = 1)$$

Use la serie binomial para expandir la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

(a) $f(x) = \sqrt{1+x}.$ **Rta**:$1 + \frac{x}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n,\ R = 1$

(b) $f(x) = \frac{1}{(2+x)^3}.$ **Rta**:$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4} n!}x^n,\ R = 2$

(c) $f(x) = (1-x)^{2/3}.$

(d) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}.$

37. Mediante la serie de Maclaurin para e^x calcule $e^{-0.2}$ con cinco posiciones decimales. **Rta**: 0.81873

38. Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

(a) $\int x\cos(x^3)dx.$ **Rta**: $C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!},\ R = \infty$

(b) $\int \frac{\cos x - 1}{x}dx.$ **Rta**: $C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n(2n)!}x^{2n},\ R = \infty$

(c) $\int \frac{e^x - 1}{x}dx$

(d) $\int \arctan(x^2)dx$

39. Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

(a) $\int\limits_0^1 x\cos(x^3)dx.$ (Tres decimales) **Rta**: 0.440

(b) $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}dx$. $\quad (|error| < 5 \cdot 10^{-6})$ **Rta**: 0.40102

(c) $\int_0^{1} e^{-x^2}dx$. $\quad$ (Cuatro decimales) **Rta**: 0.7475

40. Mediante las series evalúe el límite.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^3}$. **Rta**: $\frac{1}{3}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$. **Rta**: $\frac{1}{120}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$. **Rta**: $\frac{1}{2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

41. Calcule la suma de la serie.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$. **Rta**: e^{-x^4}

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$. **Rta**: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

(e) $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \ldots$. **Rta**: $e^3 - 1$

(f) $1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \ldots$. **Rta**: e^{-e}

(g) $1 - \ln(2) + \frac{(\ln(2)^2)}{2!} - \frac{(\ln(2)^3)}{3!} + \frac{(\ln(2)^4)}{4!} + \ldots$.

Ejercicios variados

(a) $(*)$ Use el hecho que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, para calcular la suma de la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$. Respuesta: 1

(b) $(*)$ Calcula el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$

(c) $(*)$ Verifique el valor de la siguiente serie

$$\sum_{x=1}^{\infty} xp^x = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

(d) $(*)$ Una famosa sucesión f_n, llamada **sucesión de Fibonacci**, en honor de Leonardo Fibonacci, quien la introdujo aproximadamente en el año 1200, se define mediante la fórmula recursiva

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

i. Calcule desde f_3 hasta f_{10}.

ii. Sea $\phi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1.618034$. Los gringos llamaron a este número *razón áurea* (razón dorada); afirmaron que un rectángulo cuyas dimensiones estaban es esta razón era perfecto". Se puede demostrar que

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^n - (-1)\phi^{-n}\right] \end{aligned}$$

Verifique que esto da el resultado correcto $n = 1$ y $n = 2$. El resultado general se puede demostrar por inducción (es un buen reto). Use esta fórmula explícita para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

Estrategia para analizar la convergencia o divergencia de series

1. ¿Tiende a 0 el término n-ésimo? Si no es así, la serie diverge.
2. ¿Es la serie de alguno de los tipos especiales: geométrica, serie p, telescópica o alternante?
3. ¿Se puede aplicar el criterio de la integral, el de la raíz o el cociente?
4. ¿Puede compararse la serie favorable o fácilmente con uno de los tipos especiales?

Resumen de criterios para las series

Criterio	Serie	Condición(es) de la convergencia	Condición(es) de la divergencia	Comentario
Término n-ésimo	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Este criterio no sirve para demostrar la convergencia
Series geométricas	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\|r\| < 1$	$\|r\| \geq 1$	Suma: $S = \frac{a}{1-r}$
Series telescópicas	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} b_n = L$		Suma: $S = b_1 - L$
Series p	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$	
Series alternadas o alternantes	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		Residuos: $\|R_N\| \leq a_{N+1}$
Integral (f continua, positiva y decreciente)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge	$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ diverge	Residuo: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\, dx$
Raíz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 1$.
Cociente	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| > 1$ o $= \infty$	El criterio no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = 1$.
Comparación directa ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$0 < b_n \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	
Comparación en el límite ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge	