Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Segundo Parcial
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 03 de 2019

Nombre: ______________________ **Fecha:** __________

Observación:

- Recuerde que los ejercicios impares del texto guía (Dennis G. Zill, Warren S. Wrigth, Joel Ibarra, Matemáticas 2, Cálculo integral) tienen **respuesta.** Note también que algunos ejercicios que no son del texto guía también tienen respuesta (con la intención de que el estudiante adquiera confianza en su trabajo no se han escrito las respuestas de todos).
- Este taller es la base fundamental para el Primer Parcial y por lo tanto es un **deber su realización y presentación.**
- Los ejercicios marcados con **asterisco** tienen un mayor grado de complejidad y deben ser resueltos una vez realicen los ejercicios más sencillos.

Integración por partes

1. Calcule la integral indefinida.

   (a) $\int x \sin x \cos x \, dx$, Respuesta: $\frac{1}{2} x \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin x \cos x - \frac{1}{4} x + c$
   (b) $\int x \cos 2x \, dx$, Respuesta: $\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + c$
   (c) $\int x \sec x \tan x \, dx$ Respuesta: $x \sec x - \ln | \sec x + \tan x | + c$
   (d) $\int x 3^x \, dx$, Respuesta: $-\frac{1}{\ln^2 3} (3^x - 3^x x \ln 3) + c$
   (e) $\int \ln x \, dx$, Respuesta: $x (\ln x - 1) + c$
   (f) $\int \arcsin x \, dx$, Respuesta: $\sqrt{1 - x^2} + x \arcsin x + c$
   (g) $\int \arccos x \, dx$, Respuesta: $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$
   (h) $\int \arctan x \, dx$, Respuesta: $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + 1 \right) + c$
   (i) $\int \arctan \frac{x}{2} \, dx$, Respuesta: $x \arctan \frac{1}{2} x - \ln \left(\frac{1}{4} x^2 + 1 \right) + c$

(j) $\int \ln^2 x\, dx$, Respuesta: $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + c$

(k) $\int x\sec^2 x\, dx$, Respuesta: $x\tan x - \ln|\sec x| + c$

(l) $\int x\arctan x\, dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\arctan x + c$

(m) $\int x^2\ln x\, dx$, Respuesta: $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

(n) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$, Respuesta: $\frac{e^x}{x+1} + c$

(o) $\int x^2\sin 3x\, dx$, Respuesta: $\frac{2}{27}\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x - \frac{1}{3}x^2\cos 3x + c$

(p) $\int \sin x\ln(\cos x)\, dx$, Respuesta: $-(\cos x)(\ln(\cos x) - 1) + c$

(q) $\int e^x\cos x\, dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c$

(r) $\int 4x^3e^{x^2}\, dx$, Respuesta: $2e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + c$

(s) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(t) $\int \frac{\sin 2x}{e^x}dx$

(u) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$, Respuesta: $-\frac{2}{3}\sqrt{1-e^x}\,(e^x + 2) + c$

(v) $\int \sec^5 x\, dx$.

(w) $\int x^3e^x\, dx$, Respuesta: $-e^x\left(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6\right) + c$

(x) $\int x^3\ln x\, dx$, Respuesta: $\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$

(y) $\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx$, Respuesta: $\frac{e^{x^2}}{2x^2+2} + c$

(z) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$, Respuesta: $x^2(4+x^2)^{1/2} - \frac{2}{3}(4+x^2)^{3/2} + c$

2. ($*$) Calcule por usando previamente integración por partes y el teorema fundamental del cálculo
$$\int_0^{\pi} x\sin^3 x dx$$

3. ($*$) Verifique que $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$

4. ($*$) Verifique que $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$

5. ($*$) Demuestre que

   (a) $\int \sin^n x dx = -\sin^{(n-1)} x\cos x + (n-1)\int \sin^{(n-2)} x\cos^2 x dx$

   (b) $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{(n-1)} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{(n-2)} x dx$

6. Verifique que $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$.

7. ($*$) Integrando por partes verifique que

(a) $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. ($*$) Demuestre que

$$\int (a^2-x^2)^n dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2n}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx + c$$

9. Calcule $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)dx$

10. ($*$) Calcule la integral indefinida (más complejas).

(a) $\int \sin\sqrt[4]{x-1}\, dx$

(b) $\int x(\arctan x)^2\, dx$
Respuesta: $\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln \mid x^2+1 \mid + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$

Integración por sustitución trigonométrica

11. Calcule la integral indefinida usando si es necesario una sustitución trigonométrica.

(a) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$, Respuesta: $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{2} + c$

(b) $\int \sqrt{x^2+5}dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln \mid \sqrt{x^2+5} + x \mid c$

(c) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$, Respuesta: $\frac{1}{54}\arccos(\frac{3}{x}) + \frac{1}{18x^2}\sqrt{x^2-9} + c$

(d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$, Respuesta: $-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$

(e) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

(f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$, Respuesta: $2\arcsin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + c$

(g) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

(h) $\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx$ (Resolver también por sustitución y comparar)

(i) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, Respuesta: $\frac{1}{9x}\sqrt{x^2-9} + c$

(j) $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$ Respuesta: $\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + c$

(k) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$

(l) $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-9x^2}}$

(m) $\int e^{3x}\sqrt{1-e^{2x}}dx$

(n) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}$

(o) $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{5/2}}dx$

(p) $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$

(q) $\int x \arcsin x dx$

(r) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$

12. Demuestre que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2+a^2} \mid +c \qquad (1)$$

que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2-a^2} \mid +c \qquad (2)$$

13. (∗) Con base en los resultados inmediatamente anterior (1) y (2) verifique lo siguiente:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \ln \mid 2x+1+2\sqrt{x^2+x} \mid +c$

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}dx = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln \mid 2x+1+2\sqrt{x^2+x} \mid +c$

(c) $\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}dx = -\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4-x}{4x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}-1/2}\right| - \arcsin(\frac{2x+1}{3}) + c$.

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln \mid \sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2} \mid +c$

14. (∗) Calcule la integral indefinida (un poco más complejas).

(a) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$, Respuesta: $\frac{(x+1)e^{\arctan x}}{2(1+x^2)^{1/2}}$

(b) $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$, Respuesta: $\frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{8}x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}+c$

(c) $\int e^{3x}\sqrt{1-e^{2x}}dx$, Respuesta: $\frac{1}{8}\arcsin e^x - \frac{1}{2}e^x(1-2e^{2x})\sqrt{1-e^{2x}}+c$

(d) Demuestre que $\int (\frac{a+x}{a-x})^{1/2}dx = a\arcsin(\frac{x}{a}) - \sqrt{a^2-x^2}+C$, siendo a una constante con $a > x$.

(e) $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}dx$

(f) $\int \frac{\sec^2 x}{(4-\tan^2 x)^{3/2}}dx$

(g) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}+8e^x+7)^{3/2}}dx$

(h) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+4}}$

(i) $\int \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{3/2}}dx$

(j) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

Fraciones Parciales

15. Calcule la integral indefinida por fracciones parciales

    (a) Texto guía Página 89 Ejercicios: 9, 11, 13, 15, 17,19

    (b) $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}\ln\mid x\mid +\frac{1}{6}\ln\mid x-2\mid -\frac{2}{3}\ln\mid x+1\mid +c$

    (c) $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx$, Respuesta:

    $$-\frac{1}{8x}+\frac{3}{16}\ln\mid x\mid -\frac{7}{8}\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}-\frac{3}{16}\ln\mid x-2\mid +c$$

    (d) $\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$,
    Respuesta: $\frac{9}{10}\ln\mid x^2+2x+2\mid -\frac{2}{5}\arctan(x+1)-\frac{4}{5}\ln\mid x-1\mid +c$

    (e) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx$, Respuesta: $\frac{3}{4}\ln\mid x-1\mid +\frac{5}{4}\ln\mid x+3\mid +c$

    (f) $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}dx$, Respuesta: $-8\ln\mid x\mid +\frac{4}{x}-\frac{1}{2x^2}+8\ln\mid 2x-1\mid +c$

    (g) $\int \frac{x}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$

    (h) $\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}dx$, Respuesta: $\frac{1}{9}\ln\mid x\mid -\frac{1}{3x}-\frac{1}{18}\ln\mid x^2+9\mid -\frac{1}{9}\arctan\frac{x}{3}+c$

    (i) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}dx$

    (j) $\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}\ln\mid x^2+1\mid +\arctan x-\frac{1}{2}\ln\mid (x+1)^2+2\mid -\sqrt{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+c$

    (k) $\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}dx$

    (l) $\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$, Respuesta: $\frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+4}+c$

    (m) $\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}dx$

    (n) $\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2)}dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}x^2-3x+\ln\mid x+1\mid +4\ln\mid x+2\mid +c$

    (o) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}dx$

    (p) $\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}dx$

    (q) $\int \frac{x^4}{x^3-2x^2-7x-4}dx$

    (r) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+4x+5)}dx$

    (s) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

    (t) $\int \frac{dx}{1+e^x}dx$

    (u) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+3x}}dx$

(v) $\int \frac{x^{2/3}}{x+1}dx$

16. Encuentre el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ entre la recta $x = 1/2$ y $x = 2$.

17. Demuestre usando el método de fracciones parciales que

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \mid \frac{x-a}{x+a} \mid +c.$$

Con ello pruebe además que

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln |\frac{x+a}{x-a}| + c.$$

Ejercicios variados

18. Calcule la integral indefinida

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}dx$

(c) $\int \frac{dt}{4e^{-t}-e^t}dx$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-e^{-2x}}}$

(e) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

Tabla de integrales

(a) $\int dx = x + c$

(b) $\int adx = ax + c$, donde a es una constante.

(c) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(d) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, donde $n \neq -1$

(e) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$

(f) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, *donde* $a > 0$ y $a \neq 1$

(g) $\int e^x dx = e^x + c$

(h) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(i) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(j) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

(k) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

(l) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

(m) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

(n) $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$

(o) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

(p) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(q) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

(r) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

(s) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$, donde $a \neq 0$

(t) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsec } \frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

Identidades trigométricas usadas

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\frac{\text{sen} x}{\cos x} = \tan x$
5. $\frac{\cos x}{\text{sen} x} = \cot x$
6. $\frac{1}{\text{sen} x} = \csc x$
7. $\frac{1}{\cos x} = \sec x$
8. $\frac{1}{\tan x} = \cot x$
9. $\text{sen}(2x) = 2\text{sen} \cos x$
10. $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$
11. $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
12. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$