Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Tercer Parcial
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 03 de 2019

Nombre: ______________________ **Fecha:** __________

Observación:

- Recuerde que los ejercicios impares del texto guía (Dennis G. Zill, Warren S. Wrigth, Joel Ibarra, Matemáticas 2, Cálculo integral) tienen **respuesta.** Note también que algunos ejercicios que no son del texto guía también tienen respuesta (con la intención de que el estudiante adquiera confianza en su trabajo no se han escrito las respuestas de todos).
- Este taller es la base fundamental para el Primer Parcial y por lo tanto es un **deber su realización y presentación.**
- Los ejercicios marcados con **asterisco** tienen un mayor grado de complejidad y deben ser resueltos una vez realicen los ejercicios más sencillos.

Área entre curvas

1. (Repaso) Calcule el área de la región bajo la curva en los intervalos dados.

   (a) $y = 2x + 3$, $I = [1, 4]$
   (b) $y = x^2 + 2x + 1$, $I = [-1, 3]$
   (c) $y = -x^2 + 2x + 3$, $I = [-1, 3]$
   (d) $y = 3(x^3 - x)$, $I = [-1, 0]$
   (e) $y = \sin x$, $I = [0, \pi]$
   (f) $y = 4x - x^2$, $I = [1, 3]$

2. Trazar la región acotada por las curvas $f(x)$ y $y = 0$ y calcular su área.

   (a) $f(x) = 3(x^3 - x)$

(b) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

3. Trazar la región acotada por las curvas dadas y calcular su área.

   (a) $y = x^2 - 1$, $y = -x + 2$, $x = 0$, $x = 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = -x$, $x = 0$, $x = 1$. Respuesta: $\frac{17}{6}$ uc
   (c) $y = -x^3 + 3$, $y = x$, $x = -1$, $x = 1$
   (d) $y = \frac{1}{2}x^3 + 2$, $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$
   (e) $y = -\frac{3}{8}x(x - 8)$, $y = 10 - \frac{1}{2}x$, $x = 2$, $x = 8$

4. Calcule el área de la región limitada por las curvas dadas.

   (a) $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 0$
   (b) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x + 2$
   (c) $f(x) = x$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = 0$
   (d) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$
   (e) $f(x) = -x^2 + 4x$, $g(x) = x^2$. Respuesta: $\frac{8}{3}$
   (f) $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$
   (g) $y^2 = 2x - 2$, $y = x - 5$. Resuelva el ejercicio usando elementos rectángulares de área verticales Δx. Respuesta: 18 uc
   (h) Resuelva el ejercicio anterior usando elementos rectángulares de área horizontales Δy
   (i) $y^2 = 3 - x$ y $y = x - 1$. Resuelva el ejercicio usando elementos rectángulares de área verticales Δx. Respuesta: $\frac{9}{2}$
   (j) Resuelva el ejercicio anterior usando elementos rectángulares de área horizontales Δy
   (k) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$. Respuesta: $\frac{71}{6}$ uc
   (l) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$. Respuesta: 24 uc

Volumen: Método de discos y arandelas

Discos

5. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$, alrededor de la recta $y = 1$. Respuesta: $\frac{16}{15}\pi$

6. Determine el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = \sqrt{\sin x}$ y el eje x (entre 0 y π), alrededor del eje x. Respuesta: 2π

7. Encuentre el volumen del sólido formado al girar, alrededor de la recta $x = 1$, la región acotada por la curva $(x-1)^2 = 20 - 4y$ y las rectas $x = 1$, $y = 1$ y $y = 3$, y a la derecha de $x = 1$. Respuesta: 24π

8. Encuentre el volumen del sólido formado al girar, alrededor del eje x, la región acotada por la curva $y = \sin x$ y la recta $y = 0$.

9. $(*)$ Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$

10. $(*)$ Demuestre que el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Arandelas

11. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$, alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{3}{10}\pi$

12. Determine el volumen del sólido de revolción formado al girar la región acotada por $f(x) = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y. Respuesta: $\frac{3}{2}\pi$

Variados: discos y arandelas

En los ejercicios 13 14 y 15 encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas al girar alrededor de las rectas dadas:

13. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$

    (a) el eje x. Respuesta $\frac{9\pi}{2}$
    (b) el eje y. Respuesta $\frac{36\pi\sqrt{3}}{5}$
    (c) la recta $x = 3$. Respuesta $\frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$
    (d) la recta $x = 6$. Respuesta $\frac{84\pi\sqrt{3}}{5}$

14. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

    (a) el eje x. Respuesta $\frac{32\pi}{3}$
    (b) la recta $y = 6$. Respuesta $\frac{64\pi}{3}$

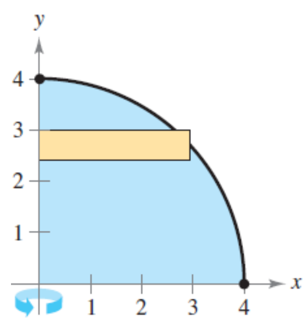
15. $y = 6 - 2x - x^2$, $y = x + 6$

    (a) el eje x

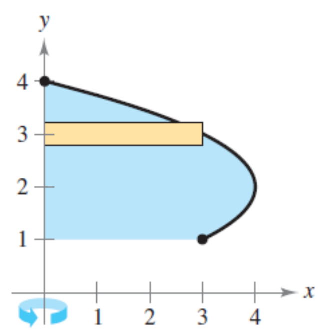
    (b) la recta $y = 3$

16. Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y.

    (a) $y = \sqrt{16 - x^2}$

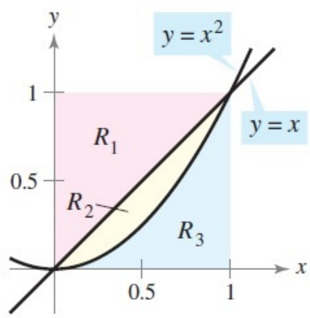


    (b) $x = -y^2 + 4y$



17. Texto guía Página 121 Ejercicios: 15,17,19, 31, 35, 39.

18. Dadas las siguientes regiones en la siguiente fígura encuentre el volumen del sólido formado al girar dichas regiones alrededor de la recta indicada.



(a) R_1 alrededor de $x = 0$. Respuesta $\frac{\pi}{3}$

(b) R_2 alrededor de $y = 0$. Respuesta $\frac{2\pi}{15}$

(c) R_3 alrededor de $x = 0$. Respuesta $\frac{\pi}{2}$

(d) R_2 alrededor de $x = 0$. Respuesta $\frac{\pi}{6}$

(e) R_1 alrededor de $x = 1$.

(f) R_2 alrededor de $y = 1$.

(g) R_3 alrededor de $x = 1$.

(h) R_2 alrededor de $x = 1$.

Voumen: Método de capas cilíndricas

19. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región acotada por las curvas $y = 3x - x^3$, $x = 0$ y $y = 2$. Respuesta: $\frac{2\pi}{5}$

20. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $y = -3$ la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 1$ y $x = 2$. Respuesta: $\frac{66\pi}{5}$

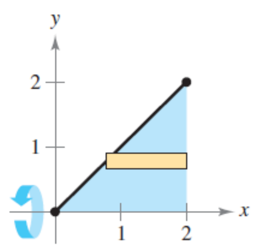
21. Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y. Respuesta: $\frac{3\pi}{2}$. Resuelva este ejercicio por método de discos y arandelas y concluya que el método de capas en este caso es mejor.

22. Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$ y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$. Respuesta: $\frac{29\pi}{15}$. ¿ Es posible en este caso aplicar el método de discos o arandelas?

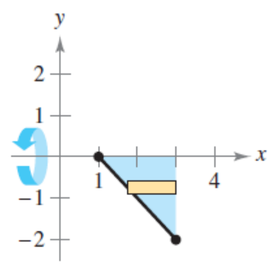
23. Texto guía Página 126 Ejercicios: 1,2,3,4,5,6.

24. Usando capas encuentre el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje x.

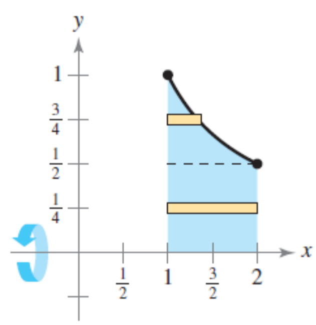
   (a) $y = x$ Respuesta: $\frac{8\pi}{3}$



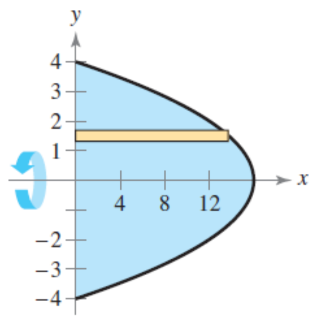
   (b) $y = 1 - x$



   (c) $y = \frac{1}{x}$. Respuesta: $\frac{\pi}{2}$



   (d) $x + y^2 = 16$



25. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{768\pi}{7}$

26. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = 4-x$, $y = x$, $y = 0$, alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{16\pi}{3}$

27. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, $y = 0$, alrededor del eje x.

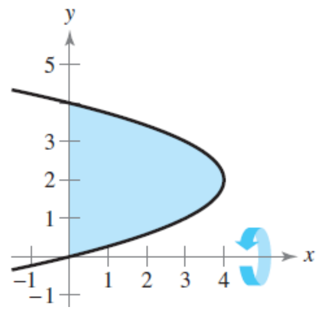
28. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = 4x - x^2$, $y = 0$, alrededor de la recta $x = 5$. Respuesta: 64π

29. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 4$. Respuesta: 16π

30. Encuentre el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, alrededor de la recta $x = 2$.

Variados: Discos, arandelas y capas

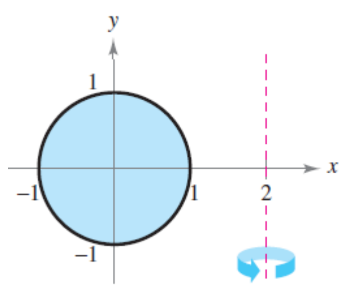
31. Decida cuál método es el más conveniente para calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la curva $(y-2)^2 = 4 - x$ alrededor del eje x. Luego apliquelo.



32. Usar el método adecuado para calcular el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

    (a) alrededor del eje x. Respuesta: $\frac{128\pi}{7}$
    (b) alrededor del eje y. Respuesta: $\frac{64\pi}{5}$
    (c) alrededor de la recta $x = 4$. Respuesta: $\frac{96\pi}{5}$

33. $(*)$ Un toro se forma al girar la región acotada por la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$. Ecuentre el volumén de este sólido (el cual tiene forma de una rosquilla). Respuesta: $4\pi^2$



Longitud de arco

34. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$. Respuesta: $\frac{33}{16}$

35. Calcule la longitud de arco de la curva $y = 4x^{\frac{3}{2}}$ del punto $P(0,0)$ al punto $Q(1,4)$. Respuesta: ≈ 4.1493

36. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[1,8]$. Respuesta: $5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

37. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$ en el intervalo $[2, 5]$. Respuesta: 309.3195

38. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 4]$. Respuesta: $\frac{76}{3}$

39. Calcule la longitud de arco de la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ del punto $P(1, 1)$ al punto $Q(8, 4)$ usando dieferecial dx y diferencial dy. Respuesta: ≈ 7.6

40. Calcule la longitud de arco de la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en el intervalo $[0, 2]$.

41. Dado que la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Respuesta: $\frac{\pi}{2}$

Integrales impropias

Integrales impropias con límite de integración infinitos

42. Determine si la integral impropia converge o diverge. En caso de converger, encuentre el límite.

    (a) $\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$

    (b) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$. Respuesta: 1

    (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$. Respuesta: Diverge

    (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$. Respuesta: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

    (e) $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

    (f) $\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x dx$.

    (g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3xdx}{(3x^2+2)^3}$.

    (h) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3dx}{x^2+9}$. Respuesta: $\frac{\pi}{3}$

    (i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$. Respuesta: 2

    (j) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

    (k) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. Respuesta: 1

    (l) $\int_1^{+\infty} \ln xdx$. Respuesta: Diverge.

    (m) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xdx$.

43. Demuestre que la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ es convergente, mientras que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ es divergente.

44. ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, y $x = 1$?

45. ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región del Ejercicio 44 alrededor del eje x? Respuesta: Sí, π.

46. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ y el eje x. Respuesta: Sí, $\frac{\pi}{2}$.

47. Determine si es posible asignar un número finito para representar la medida del volumen del sólido formado por la rotación, alrededor del eje x, de la región que se encuentra a la derecha de la recta $x = 1$ y limitada por la curva $y = \frac{1}{x^{3/2}}$ y el eje x. Respuesta: Sí, $\frac{\pi}{2}$.

48. Determine los valores de n para los cuales la integral $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^n x}$ es convergente.

Tabla de integrales

(a) $\int dx = x + c$

(b) $\int adx = ax + c$, donde a es una constante.

(c) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(d) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, donde $n \neq -1$

(e) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

(f) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, *donde* $a > 0$ y $a \neq 1$

(g) $\int e^x dx = e^x + c$

(h) $\int \sin xdx = -\cos x + c$

(i) $\int \cos xdx = \sin x + c$

(j) $\int \sec^2 xdx = \tan x + c$

(k) $\int \csc^2 xdx = -\cot x + c$

(l) $\int \sec x \tan xdx = \sec x + c$

(m) $\int \csc x \cot xdx = -\csc x + c$

(n) $\int \tan xdx = \ln|\sec x| + c$

(o) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

(p) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(q) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

(r) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

(s) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$, donde $a \neq 0$

(t) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsec}\,\frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

(u) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$

(w) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + c$, donde $a \neq 0$

(x) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x+a}{x-a}| + c$, donde $a \neq 0$

Identidades trigométricas usadas

1. $\text{sen}^2 x + \cos^2 = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\frac{\text{sen} x}{\cos x} = \tan x$
5. $\frac{\cos x}{\text{sen} x} = \cot x$
6. $\frac{1}{\text{sen} x} = \csc x$
7. $\frac{1}{\cos x} = \sec x$
8. $\frac{1}{\tan x} = \cot x$
9. $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}\cos x$
10. $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$
11. $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
12. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$