

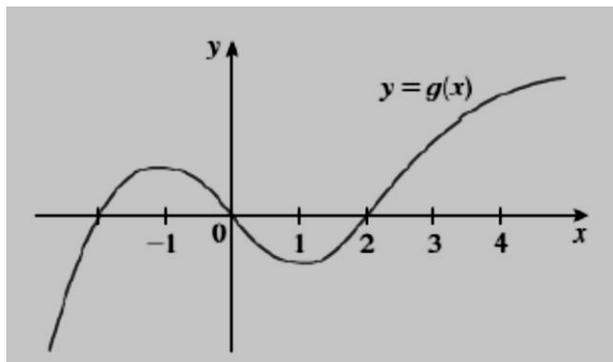
TALLER DE PREPARACION PARA EL TERCER PARCIAL

2022-10

Nota: en los ejercicios que siguen puede usar las reglas de derivación.

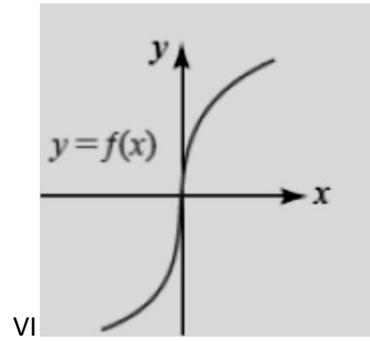
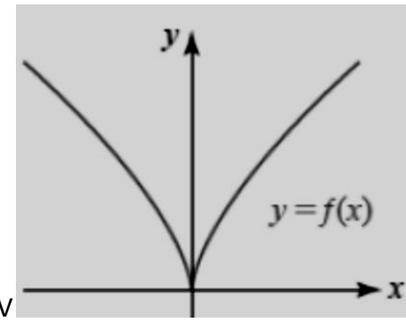
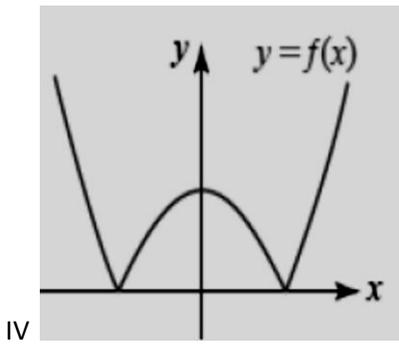
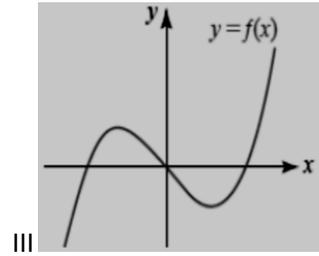
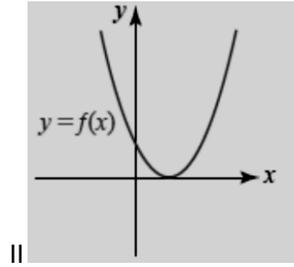
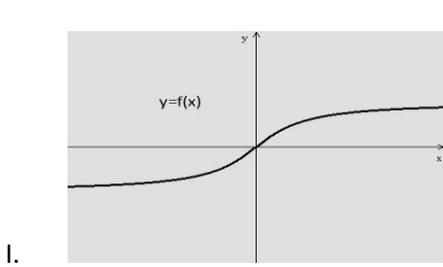
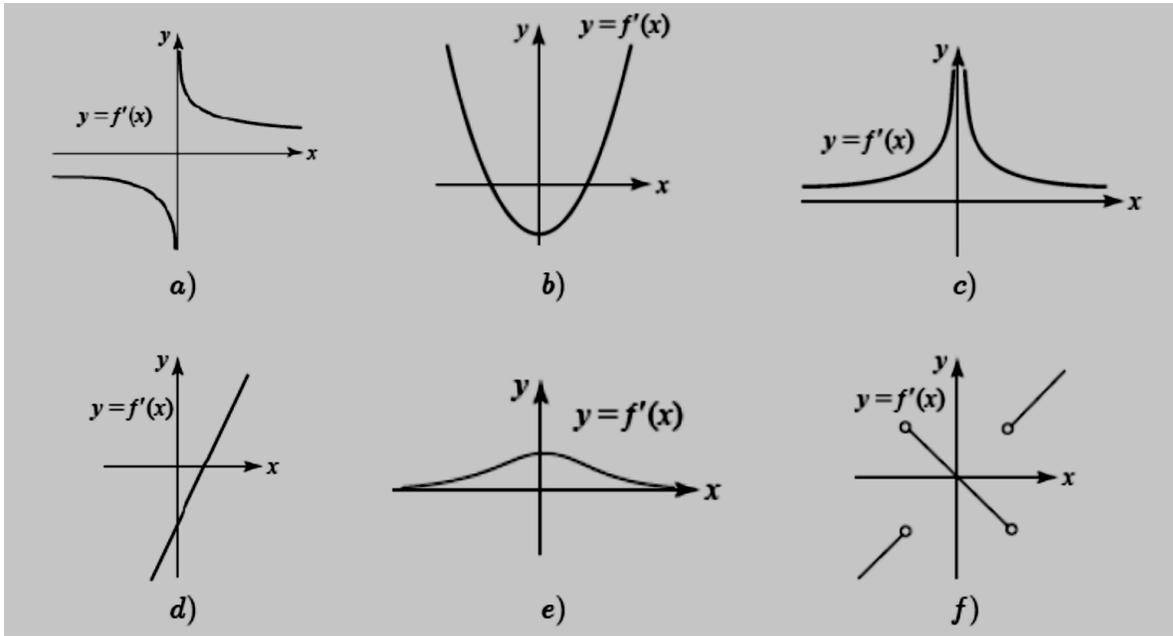
- Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado
 - $f(x) = 4 - \frac{8}{x}$ $P = (1, -4)$
 - $f(x) = \text{sen}(x)$, $P = (\frac{\pi}{2}, 1)$
 - $f(x) = -2x^3 + x$, $P = (-1, 1)$
 - $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $P = (4, \frac{1}{2})$
 - $y = \frac{1}{2+x}$, $P = (2, \frac{1}{4})$
- Si una pelota es lanzada, desde el suelo, al aire con una velocidad de 40 m/s , su altura (en metros) respecto al suelo es $y = 40t - 16t^2$, use la noción de razón de cambio instantáneo para hallar la velocidad de la pelota en el instante $t = 2 \text{ s}$ (Use las reglas de derivación)
- El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación $s = \frac{1}{t^2}$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$
- Para la función g cuya grafica se muestra a continuación. ordene los siguiente números de menor a mayor y explique su razonamiento

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$

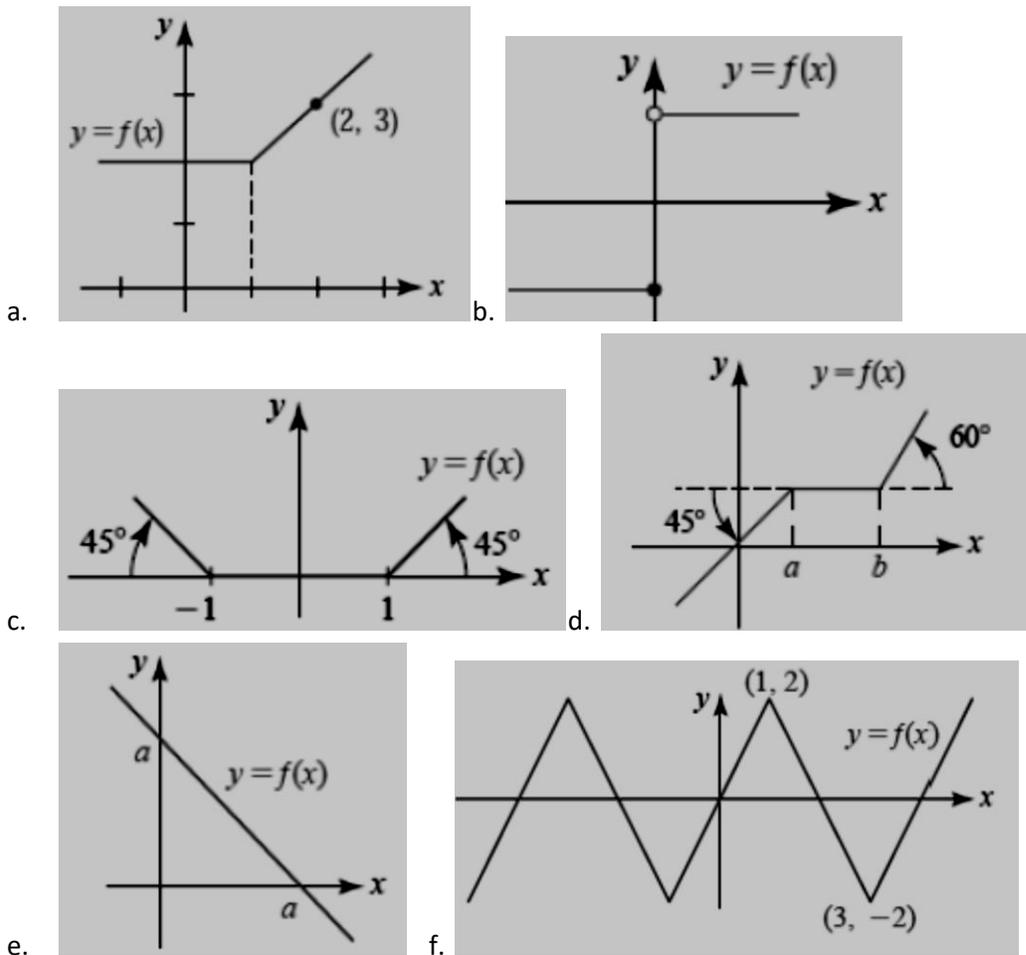


- Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $a = 2$ es $y = 4x - 5$ encuentre $f(2)$ y $f'(2)$
- Haga el bosquejo de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

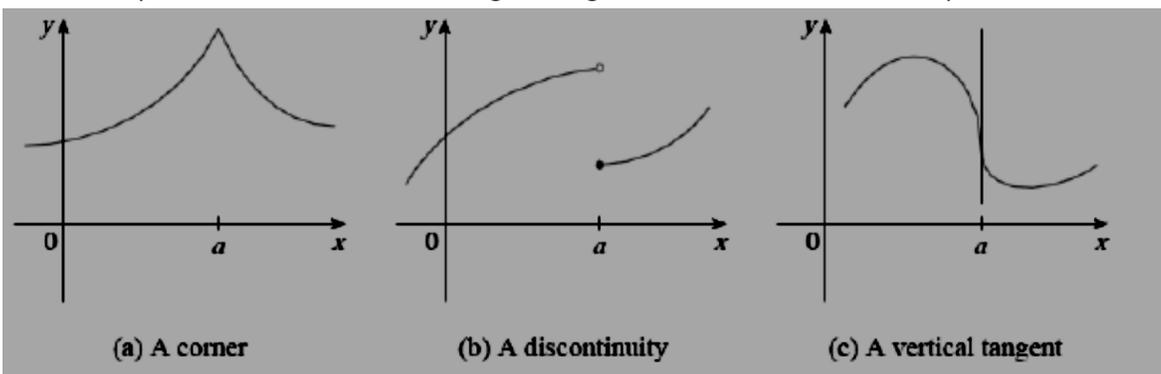
7. En los ejercicios del I al VI relacione la gráfica de f con una gráfica de f' de $a) - f)$



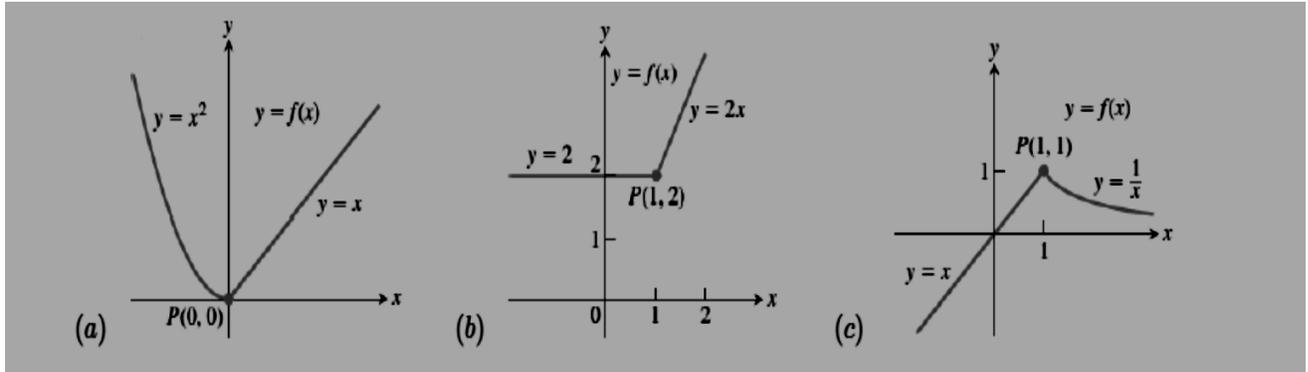
8. Bosqueje la gráfica de f' a partir de la gráfica de f



Nota: ¿Cómo puede una función dejar de ser diferenciable? Vimos que la función $y = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$; una revisión cuidadosa de su gráfica muestra que ésta cambia abruptamente de dirección cuando $x = 0$. En general si la gráfica de una ecuación tiene una “esquina” o un “pico”, entonces f no tiene tangente en este punto y f no es diferenciable allí. (al intentar calcular f'_+ y f'_- encontramos que son diferentes). Mostramos además que si una función f es diferenciable en a , entonces f es continua en a ; en consecuencia, si f no es continua en a entonces f no puede ser derivable en a . Así, f no es derivable en cualquier discontinuidad. Una tercera posibilidad es que la curva tenga un línea tangente vertical en $x = a$, f es continua en a y $\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty$. Esto quiere decir que la línea tangente se vuelve cada vez más empinada cuando $x \rightarrow a$. En la siguiente gráfica se muestran estas tres posibilidades.



9. Compare las derivadas por la derecha y por la izquierda de las funciones dadas en las siguientes gráficas, para mostrar que no son diferenciables en el punto P . Puede utilizar cualquier definición para $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ que involucren el límite



10. Muestre que la función $f(x) = |x - 3|$ no es derivable en 3. Encuentre una fórmula para f' y dibuje su gráfica.
 11. Si $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ muestre que $g'(0)$ no existe. Dibuje la gráfica de g e ilustre la recta tangente vertical en $x = 0$
 12. ¿Es $f(x) = x + \sqrt{x}$ derivable en $x = 0$? ¿Cómo se comporta la gráfica de f en $x = 0$?
 13. ¿Dónde no es derivable la función $f(x) = \llbracket x \rrbracket$? Halle una fórmula para f' y dibuje su gráfica
 14. Dada f se definió su derivada por la izquierda en a y su derivada por la derecha en a como sigue

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{o} \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si estos límites existen. Por lo tanto, $f'(a)$ existe, si y solo si, éstas derivadas laterales existen y son iguales

a. Encuentre $f'_-(0), f'_+(0), f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- b. Bosqueje la gráfica de f
 c. ¿Dónde f es discontinua?
 d. ¿Dónde no es derivable f ?

15. Calcular las derivadas usando reglas de derivación y simplifique donde sea posible

a. $g(x) = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$ R. $5x^4 - 9x^2 + 4x - 28$

b. $F(y) = \frac{3y+1}{2y-5}$ R. $-\frac{17}{(2y-5)^2}$

c. $y = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ R. $\frac{1}{3} \frac{5x+2}{x^{1/3}}$

d. $y = \frac{10}{x^2+1}$ R. $-\frac{20x}{(x^2+1)^2}$

e. $y = \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$ R. $-\frac{1}{2} \frac{2\sqrt{x}+3}{x^{5/2}}$

f. $j(x) = (x + x^{-1})^3$ R. $\frac{3(x^2+1)^2(x^2-1)}{x^4}$

g. $u = t \text{sen}(t)$ R. $\sin(t) + t \cos(t)$

h. $g(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ R. $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

i. $f(x) = \frac{x^2-2}{2x+1}$ R. $\frac{2(x^2+x+2)}{(2x+1)^2}$

m. $y = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ R. $\frac{1}{2} \frac{3x^2+4x-3}{x^{3/2}}$

p. $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ R. $-4 \cos(x) \sin(x)$

q. $y = (\cos(x))^{-1}$ R. $\cos(x)$

r. $y = 4\cos^2(\sqrt{x})$ R. $-\frac{4 \cos(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

t. $y = \sin(\sqrt{2x})$ R. $\frac{1}{2} \frac{\cos(\sqrt{2x}) \sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

u. $y = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ R. $-\frac{\sec^2(1/x)}{x^2}$

v. $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ R. $\frac{2x}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} (x^2+1)^2}$

w. $y = 10^{-3x^2}$ R. $10^{-3x^2} * \ln 10 * (-6x)$

x. $f(x) = e^{e^{x^2}}$ R. $2x e^{x^2+e^{x^2}}$

y. $y = e^{2x} e^{3x} e^{4x}$ R. $9 e^{9x}$

z. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ R. $\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

16. Calcular las derivadas usando reglas de derivación y simplifique donde sea posible

a. $f(x) = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$ R. $\frac{2x(2x^2+3)}{x^4+3x^2+1}$

b. $F(y) = \ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$ R. $\frac{1}{2y}$

c. $y = (\ln(x))^{\frac{1}{2}}$ R. $\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)} x}$

d. $y = \frac{\ln(x)}{x}$ R. $-\frac{-1+\ln(x)}{x^2}$

e. $j(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ R. $\frac{1}{x(x+1)}$

f. $u = \ln(\sqrt{5x+1}(x^3+6)^6)$ R. $\frac{1}{2} \frac{185x^3+36x^2+30}{(x^3+6)(5x+1)}$

g. $y = \ln\left(\sqrt{\frac{(3x+2)^5}{x^4+7}}\right)$ R. $\frac{1}{2} \frac{3x^4-8x^3+105}{(3x+2)(x^4+7)}$

h. $g(x) = \sqrt{\ln(\sqrt{x})}$ R. $\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln(x)} x}$

i. $f(x) = \sec(x) \tan(x)$ R. $\sec(x)(2\sec^2(x) - 1)$

j. $f(\theta) = \frac{1}{1+\cos(\theta)}$ R. $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + 2\cos(\theta) + 1}$

k. $y = \frac{1}{(1+\sec(x))^2}$ R. $-\frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^3 + 3\cos(x)^2 + 3\cos(x) + 1}$

l. $g(x) = e^{x\sec(2x)}$ R. $(\sin(2x) + 2x\cos(2x))e^{x\sin(2x)}$

m. $F(y) = \operatorname{sen}(e^y) + e^{\operatorname{sen}(y)}$ R. $e^{\sin(y)}(\cos(e^y)e^y + \sin(e^y)\cos(y))$

n. $u = 10^{1-t^2}$ R. $-2t\ln(10)10^{1-t^2}$

o. $y = \sec^2(3\theta)$ R. $\frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)^3}$

p. $f(x) = \frac{1}{6}(1 + \cos^2(7x))^2$ R. $-\frac{14}{3}(1 + \cos(7x)^2)\cos(7x)\sin(7x)$

q. $y = 2^{3^{x^2}}$ R. $2^{1+3^{x^2}}3^{x^2}x\ln(3)\ln(2)$

r. $y = 4\operatorname{sen}(\sqrt{1+\sqrt{t}})$ R. $\frac{\cos(\sqrt{1+\sqrt{t}})}{\sqrt{1+\sqrt{t}}\sqrt{t}}$

s. $f(x) = \operatorname{arcsen}(5x-1)$ R. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-x(5x-2)}}$

t. $y = \operatorname{arccos}\left(\frac{x+1}{3}\right)$ R. $-\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

u. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ R. $\frac{2}{x^2+1}$

v. $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ R. $\frac{1}{x^2+1}$

x. $g(x) = \tan^{-1}(x + \sqrt{1+x^2})$ R. $\frac{1}{2(x^2+1)}$

y. $u = \ln(\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right))$ R. $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}\operatorname{arccos}(1/\sqrt{x})}$

z. $y = \tan(\sin^{-1}(x^2))$ R. $\frac{2x}{(-x^4+1)^{3/2}}$

17. Encuentre y' usando derivación implícita

a. $9x^2 - y^2 = 1$ R. $\frac{9x}{y}$

b. $2x^2 + x + xy = 1$ R. $-\frac{y+4x+1}{x}$

c. $\cos(x) + \sqrt{y} = 5$ R. $2\sin(x)\sqrt{y}$

d. $x = \sec\left(\frac{1}{y}\right)$ R. $-\frac{y^2\cos\left(\frac{1}{y}\right)^2}{\sin\left(\frac{1}{y}\right)}$

e. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$ R. $-\frac{5x^4+4x^3y-3y^2}{x^4-6xy+3y^2}$

f. $4\cos(x)\text{sen}(y) = 1$ R. $\frac{\cos(y)\cos(x)}{\sin(y)\sin(x)}$

g. $e^y\text{sen}(x) = x + xy$ R. $-\frac{e^y\cos(x) - y - 1}{e^y\sin(x) - x}$

h. $y = e^{x+y}$ R. $-\frac{e^{y+x}}{e^{y+x} - 1}$

i. $xy = \text{sen}(x+y)$ R. $-\frac{\cos(y+x) - y}{\cos(y+x) - x}$

j. $x + y = \cos(xy)$ R. $-\frac{\sin(xy)y + 1}{\sin(xy)x + 1}$

k. $\frac{x+y}{x-y} = x$ R. $\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2y}{x}$

n. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ R. $\frac{y+x}{-y+x}$

o. $y = \cos(e^{xy})$ R. $-\frac{\sin(e^{xy})e^{xy}y}{\sin(e^{xy})xe^{xy} + 1}$

p. $e^x + e^y = y$ R. $-\frac{e^x}{e^y - 1}$

q. $y^2 = \ln(xy)$ R. $\frac{y}{x(2y^2 - 1)}$

18. Use derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función.

a. $y = \frac{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}}{4x+3}$ R. $\frac{1}{2} \frac{8x+5}{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}(4x+3)^2}$

b. $y = (x+4)(2x+3)(3x-4)$ R. $18x^2 + 50x - 8$

c. $y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$ R. $\frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}} \left[\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{24x^2+6} \right]$

d. $y = x^{\text{sen}(x)}$ R. $x^{\sin(x)-1} (\cos(x) \ln(x)x + \sin(x))$

e. $y = x(x-1)^x$ R. $(-1+x)^{-1+x} (\ln(-1+x)x^2 - x\ln(-1+x) + x^2 + x - 1)$

f. $y = (\ln(x))^x$ R. $\ln(x)^{-1+x} (\ln(\ln(x)) \ln(x) + 1)$

g. $y = (\text{sen}(x))^{\cos(x)}$ R. $\sin(x)^{\cos(x)-1} (\cos(x)^2 \ln(\sin(x)) + \cos(x)^2 - \ln(\sin(x)))$

h. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$ R. $-\frac{1}{2} \frac{3x^4 - 4x^3 - 1}{\sqrt{\frac{-1+x}{x^4+1}} (x^4+1)^2}$

i. $y = (\text{sen}(x))^{\cos(x)} + (\cos(x))^{\text{sen}(x)}$ R. $\sin(x)^{\cos(x)} \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)} \right) + \cos(x)^{\sin(x)} \left(\cos(x) \ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)} \right)$

j. $y = x^{\frac{1}{x}}$ R. $x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right)$

k. $y = \frac{e^{-x}\cos^2(x)}{x^2+x+1}$ R. $-\frac{e^{-x}\cos(x)^2}{x^2+x+1} - \frac{2e^{-x}\cos(x)\sin(x)}{x^2+x+1} - \frac{e^{-x}\cos(x)^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

19. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ o y'' mediante derivación implícita

a. $x^3 + y^3 = 1$ R. $\frac{-2x}{y^5}$

b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ R. $\frac{1}{2x^{3/2}}$

c. $x^2 - y^2 = 25$ R. $\frac{-1}{y^3}$

d. $x^4 + 4y^2 = 16$ R. $\frac{-1}{y^3}$

e. $x + y = \text{sen}(y)$ R. $-\frac{\cos(y) + 1}{\sin(y) (\cos(y)^2 - 2 \cos(y) + 1)}$

f. $xy^4 = 5$ R. $\frac{5}{16} \frac{y}{x^2}$

g. $4y^3 = 6x^2 + 1$ R. $-\frac{-y^3 + 2x^2}{y^5}$

h. $x^3 + y^3 = 27$ R. $\frac{-54x}{y^5}$

20. Resuelva los siguientes ejercicios aplicando el concepto de derivada

a. Encuentre los puntos sobre la curva donde la tangente es horizontal (basta con hallar sus coordenadas en x)

i. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ R. $x = -2, x = 1$

ii. $y = e^x - 2x$ R. $x = \ln(2)$

iii. $y = \frac{\cos(x)}{2 + \text{sen}(x)}$ con $0 \leq x \leq 2\pi$ R. $x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$

iv. $y = x^2 \ln(x)$ R. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

b. Encuentre una ecuación de la recta tangente de acuerdo con los datos dados

i. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2, x = 1$ ii. $f(x) = (-1 + \cos(4x))^3, x = \frac{\pi}{8}$

iii. $y = 2^{3x^2}, x = 1$ R. $y - 8 = 48 \ln 2 \ln 3 (x - 1)$ iv. $y = x\sqrt{2 - x^2}, x = 1$

v. $x^4 + y^3 = 24, x = 2$ vi. $f(x) = x \arctan(x), x = 1$ R. $y = \frac{\pi+2}{4}(x-1) + \frac{\pi}{4}$

vii. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4, (-3\sqrt{3}, 1)$ viii. $f(x) = \arcsen(x-1), x = \frac{1}{2}$

ix. $f(x) = (e^x + 1)^2, x = 0$ x. $f(x) = \ln(xe^{-x^3}), x = 1$

xi. $y = x^{x+2}, x = 1$ R. $y = 3x - 2$ xi. $y \text{sen}(2x) = x \cos(2y), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

c. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica que tengan la recta tangente tenga la pendiente dada o la propiedad indicada

i. $y = (x+1)(2x+5), m = -3$ ii. $y = \frac{x+4}{x+5},$ perpendicular a $y = -x$

R. $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$ R. $(-4, 0), (-6, 2)$

ii. $y = e^x,$ paralela a $3x - y = 7$ R. $(\ln 3, 3)$

iv. $f(x) = 5 - 2 \text{sen}(x) 0 \leq x \leq 2\pi,$ paralela a $y = \sqrt{3}x - 1$ R. $\left(\frac{5\pi}{6}, 4\right), \left(\frac{7\pi}{6}, 6\right)$

d. Aplique la red conceptual alrededor de la derivada para resolver los siguientes ejercicios.

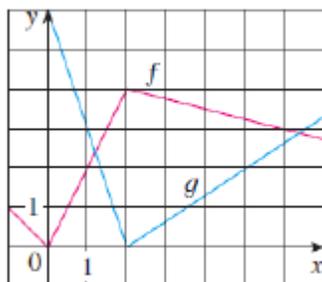
i. Encuentre la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11, f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4.$

R. $a = -2, b = 3, c = -6$

ii. Hallar un polinomio P de segundo grado que satisfaga las condiciones siguientes: $P(2) = 5, P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2.$

R. $P(x) = x^2 - x + 3$

- iii. Hallar una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente 8 en $x = -1$ y pasa por el punto $(2,15)$
 R. $y = -x^2 + 6x + 7$
- iv. Halle una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya grafica posee tangentes horizontales en $(-2,6)$ y $(2,0)$
 R. $a = 3/16, b = 0, c = -9/4, d = 3$
- v. Encuentre los valores de b y c de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$
 R. $b = 8, c = -9$
- vi. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasan por el punto $(\frac{3}{2}, 1)$ y que es (son) tangente(s) a $f(x) = x^2 + 2x + 2$. (Sugerencia: Dibuje la gráfica de la función y ubique el punto dado).
 R. $y = 1, y = 10x - 14$
- vii. Encuentre el valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{k+x}{x^2}$ tenga pendiente 5 en $x = 2$.
 R. $x = -21$
- viii. Sea $g(x) = \frac{x}{e^x}$, encuentre $g'(x), g''(x), g'''(x), g^{(4)}(x)$ e induzca una formula general para $g^{(n)}(x)$
 R. $g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}ne^{-x} + (-1)^nxe^{-x}$
- ix. Encuentre la 50-ésima derivada de $y = \cos(2x)$
 R. $y^{(50)} = -2^{50}\cos(2x)$
- x. Encuentre la 1000-ésima derivada de $f(x) = xe^{-x}$
- xi. Encuentre constantes A y B tales que la función $y = A\sin(x) + B\cos(x)$ satisface la ecuación $y'' + y' - 2y = \sin(x)$
 R. $A = -\frac{3}{10}, B = -\frac{1}{10}$
- xii. Use la regla de la cadena para mostrar que:
1. La derivada de una función impar es una función par
 2. La derivada de una función par es una función impar
- xiii. Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y use la regla de la cadena para mostrar que $\frac{d(|x|)}{dx} = \frac{x}{|x|}$
- xiv. Verifique que $f'(x) = g'(x)$ y explique la relación que existe entre f y g .
1. $f(x) = \frac{3x}{x+2}, g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$
 2. $f(x) = \frac{\sin(x)-3x}{x}, g(x) = \frac{\sin(x)+2x}{x}$
- xv. Sean f y g funciones cuyas graficas son mostradas abajo, sean $u(x) = f(g(x)), v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre cada derivada si esta existe. Si no existe, explique por qué.
1. $u'(1)$
 2. $v'(1)$
 3. $w'(1)$



R. $u'(1) = 3/4$, $v'(1)$ no existe, $w'(1) = -2$

xvi. La función de posición de un objeto, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de 122.5 m es $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$ donde s se mide en metros y t en segundos.

1. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 2$ s?
2. ¿En qué instante la pelota golpea al suelo?
3. ¿Cuál es la velocidad de impacto?

R. $-19,6 \text{ m/s}$, 5 s , -49 m/s

xvii. El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Hallar la razón de cambio instantánea del volumen respecto al radio. **Interprete el resultado**

R. $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \text{ u}^3/\text{u}$. **El volumen de la esfera tiende a aumentar en $4\pi r^2$ unidades cúbicas cuando el radio tiende a aumentar en una unidad de longitud**

xviii. La Ley de la Gravitación Universal establece que la fuerza F entre dos masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r es $F = K \frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde K es una constante ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de F respecto a r cuando $r = 2 \text{ km}$? **Interprete el resultado**

R. $\frac{dF}{dr}(2) = -\frac{1}{4} K m_1 m_2$. **En el instante en que el radio entre las masas es de 2 kilómetros, la fuerza entre las masas tiende a disminuir en $\frac{1}{4} K m_1 m_2$ unidades de fuerza**

xix. La ecuación de la demanda de un cierto detergente es $x = 1000(50 - 5p - p^2)$ donde se demandan x cajas cuando p (pesos) es el precio unitario.

1. Determine la tasa de cambio promedio de la demanda con respecto al precio cuando éste se incrementa de \$2 a \$2.20. **Interprete el resultado**

R. $-26000 \text{ cajas/pesos}$. **Cuando el precio por caja aumente de 2 a 2.20 pesos el número de cajas demandadas disminuye en 26000**

2. Calcule la tasa de cambio instantánea de la demanda con respecto al precio cuando éste es de \$2. **Interprete el resultado**

R. $-25000 \text{ cajas/pesos}$. **En el instante en que el precio por unidad es de 2 pesos, el número de cajas demandadas tiende a disminuir en 25000**

xx. La ecuación de la oferta de una cierta clase de bombillos es $x = 1000(4 + 3p + 2p^2)$ donde se ofrecen x bombillos cuando el precio unitario es de p (pesos).

1. Halle la tasa promedio de cambio de la oferta con respecto al precio cuando éste se incrementa de \$90 a \$93. **Interprete el resultado**
2. Halle la tasa de cambio instantánea de la oferta respecto al precio cuando éste es de \$90. **Interprete el resultado**

xxi. La población de un cierto pueblo t años después del 1 de enero 2019 se espera que sea $f(t)$, donde $f(t) = 10000 - \frac{4000}{t+1}$

1. Utilice la derivada para calcular el cambio esperado de la población del 1 de enero de 2023 al 1 de enero de 2024. **Interprete el resultado**
2. Determine la variación exacta que se espera ocurra en la población del 1 de enero de 2023 al 1 de enero de 2024. **Interprete el resultado**