TALLER DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN FINAL

2019-30

Puntos críticos, extremos relativos y absolutos

En los siguientes ejercicios encuentre los números críticos.

1. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
2. $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$
3. $f(t) = (t^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$
4. $f(x) = \frac{x-3}{x+7}$
5. $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$
6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+4}$

En los siguientes ejercicios encuentre los extremos absolutos en el intervalo cerrado dado.

7. $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$, $[-2,3]$
8. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$, $[-1,1]$
9. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 3$, $[0,4]$
10. $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$, $[-1,1]$
11. $f(x) = sen(x) - \cos(x)$, $[0, \pi]$
12. $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{x}$, $[1,4]$

Verifique que las funciones dadas satisfacen las tres hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo dado. Luego encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle

13. $f(x) = 15 - 12x + 3x^2$, $[1,3]$
14. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0,9]$
15. $f(x) = \cos(2x)$, $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$

Verifique que las funciones dadas satisfacen las hipótesis del teorema del teorema del valor medio sobre el intervalo dado. Luego encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

16. $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $[-2,2]$
17. $f(x) = e^{-2x}$, $[0,3]$
18. $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $[1,4]$

Muestre que las siguientes ecuaciones tiene exactamente una raíz real

19. $2x + \cos(x) = 0$
20. $x^3 + e^x = 0$

Trace la gráfica de las siguientes funciones, para ello determine: dominio, intersectos con los ejes, intervalos de crecimiento o decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

21. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$
22. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 3$
23. $f(x) = x^4 - 8x^3$
24. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 12x$
25. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$
26. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
27. $f(x) = \frac{3(x^2-9)}{x^2-4}$
28. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

Problemas de máximos y mínimos

1. Un terreno se encuentra a un lado de una calle y se desea cercar una parte rectangular de 260 metros cuadrados, de modo que la cerca construida mida 1.5 metros de alto. El lado del terreno cercado que colinda con la calle debe ser de ladrillos y los otros tres lados de malla. Si el metro cuadrado construido de ladrillos cuesta $500 y el de malla $200, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que minimizan el costo de su cerca y cuál es el costo mínimo?

$$R/\ Costo\ mínimo = \$25597, ancho = \sqrt{455}, largo = \frac{200}{\sqrt{455}}$$

2. Se desea hacer una caja con tapa cuyo volumen sea de 72 cm3. Además, lo largo de la base debe ser el doble de lo ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de modo que la superficie de la caja sea mínima? y, ¿cuál la superficie mínima?

$$R. Largo = 3\ cm, ancho = 6cm, alto = 4\ cm, superficie\ mínima\ \ de\ la\ caja\ 108\ cm^2$$

3. Se desea hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?

$$Respuesta.\ altura = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

4. Un barco encalló a 9 km del punto P más próximo de una costa con forma de línea recta. Se necesita enviar un mensajero a un pueblo situado en la orilla de la costa a 15 km de P. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km por hora, y en una barca a 4 km por hora, decir en qué punto de la orilla debe desembarcar para llegar al pueblo lo más pronto posible.

$$Respuesta.\ 3\ km\ antes\ de\ llegar\ al\ pueblo$$

5. Sea P el punto, en una playa recta, más cercano a una isla que está a 60 km. Para llegar de la isla al poblado más próximo que está a 200 km de P se usa un pequeño barco y un

autobús. La velocidad del barco es de 40 km por hora y la del autobús 90 km por hora. El costo por hora del uso del barco es de \$2, 000 y el costo del uso del autobús es de \$1, 500 por hora. ¿En qué punto debe construirse la central de autobuses para que los costos sean mínimos?

$$Respuesta: 178{,}78\ km\ del\ poblado$$

6. Encontrar el trapecio de máxima área inscrito en un semicírculo de radio 10 cm.

$$Respuesta:\ altura\ del\ trapecio = 5\sqrt{3}cm$$

7. Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio 25 cm

$$Respuesta: .\, altura = \frac{50}{\sqrt{3}}cm$$

8. Inscribir un triángulo isósceles de área máxima en una circunferencia de radio 15 cm.

$$Respuesta\ .Triangulo\ equilatero\ de\ \ 15\sqrt{3}cm$$

9. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pude inscribirse en cono circular recto de radio R y altura H

$$Respuesta.\ \ r = \frac{2R}{3}\ , h = \frac{H}{3}$$

10. Hallar las dimensiones del cono circular recto que puede inscribirse en una esfera de radio R

$$Respuesta.\quad h = \frac{4}{3}R, \qquad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

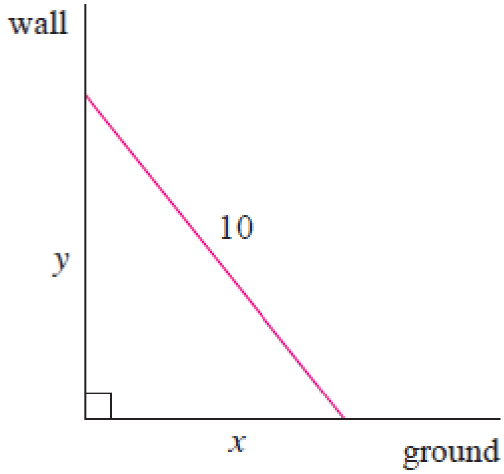
11. Calcule el área del mayor rectángulo que pueda inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$$Respuesta.\ 12\ unidades\ cuadradas$$

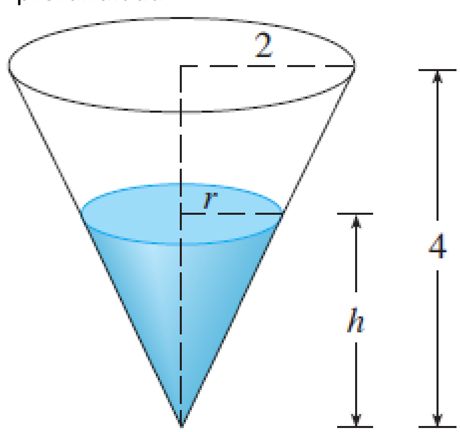
12. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine $a\ y\ b$ de modo que f tenga un punto de inflexión en el punto $(1,2)$
13. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ determine $a, b\ y\ c$ de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1, -1)$ y que la pendiente de la tangente de inflexión en ese punto sea -3

Problemas de razones de cambio relacionadas

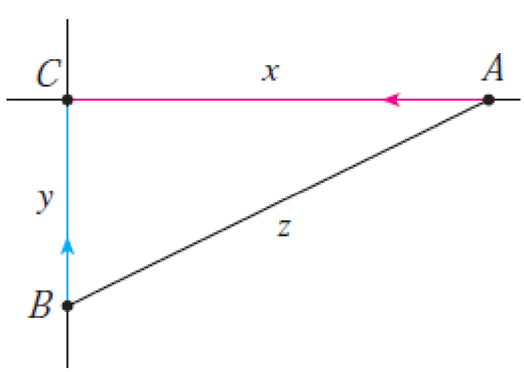
1. Se infla un globo esférico y su volumen se incrementa a razón de $100\ {cm^3}/_{seg}$. ¿Qué tan rápido aumente el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?
2. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de $1\ {pie}/_{seg}$, ¿qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera, cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro



3. Un tanque de agua tiene la forma de cono circular invertido, el radio de la base es 2m y la altura de 4m. Si el agua se empieza a bombear al tanque a razón de $2\,{}^{m^3}/_{min}$, encuentre la razón con la que el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3m de profundidad



4. El automóvil A viaja hacia el Oeste a una velocidad de $50\,{}^{km}/_{hora}$ y el automóvil B viaja hacia el Norte a $60\,{}^{km}/_{hora}$. Ambos se dirigen hacia la intersección de dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a $0.3\ kms$ y el automóvil B está a $0.4\ kms$ de la intersección?



5. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x, además, el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, calcule $\frac{dV}{dt}$ en términos de $\frac{dx}{dt}$
6. Si A es el área de un círculo cuyo radio es r y el círculo se amplía a medida que pasa el tiempo, determine $\frac{dA}{dt}$ en términos de $\frac{dr}{dt}$
7. Suponga que un aceite se derrama de un depósito agrietado y que se extiende de acuerdo a aun patrón circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa a una razón constante de $1\, {}^{m}/_{seg}$, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuando el radio es de$30m$?
8. Un tanque cilíndrico con radio $5m$ está siendo llenado con agua a una razón de $3\, {}^{m^3}/_{min}$. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura del agua?
9. Un globo de aire caliente que asciende en línea recta desde el nivel del suelo es rastreado por un observador que está a $500\, pies$ del punto de elevación. En el momento que el ángulo de elevación del observador es ${}^{\pi}/_{4}$, el ángulo crece a razón de $0.14\, \frac{rad}{min}$. ¿Qué tan rápido se está elevando el globo en ese momento?
10. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de $1\, milla$ y a una rapidez de $500\, {}^{millas}/_{hora}$ pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con que la distancia desde el avión a la estación se incrementa, cuando este está a $2\, millas$ de la estación.
11. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de $15\, pies$ de altura. Un hombre de $6\, pies$ de altura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de $5\, {}^{pies}/_{seg}$ a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido la punta de su sombra se desplaza cuando está a $40\, pies$ del poste?
12. A mediodía, un barco A está a $150\, km$ al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a $35\, km/hora$ y el barco B navega hacia el norte a $25\, km/hora$. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 4:00 pm?
13. Una lámpara sobre el piso ilumina una pared a $12\, m$ de distancia. Si un hombre de $2\, m$ de estatura camina desde la lámpara hacia el edificio a una rapidez de $1.6\, m/seg$, ¿qu´e tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre el muro cuando está a $4\, m$ del edificio?
14. Dos vehículos parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a $60\, millas/h$ y el otro hacia el oeste a $25\, millas/h$. ¿En qué proporción se incrementa la distancia entre los vehículos dos horas después?
15. La altura de un triángulo se incrementa a razón de $1\, cm/min$ mientras que el área del triángulo aumenta a razón de $2\, cm^2/min$. ¿A qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de $10\, cm$ y el área es de $100\, cm^2$?
16. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a una razón de $10.000\, cm^3/min$ al mismo tiempo que se bombea agua al tanque a una razón constante. El depósito mide $6\, m$ de alto y el diámetro en la parte superior es de $4\, m$. Si el nivel de agua se eleva a una razón de $20\, cm/min$ cuando la altura del agua es $2\, m$, encuentre la razón a la que el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

17. Un canal de agua mide 10 m de largo y su sección transversal tiene la forma de una trapezoide isósceles que tiene 30 cm de ancho en la parte inferior, 80 cm de ancho en la parte superior y tiene una altura de 50 cm. Si el canal se está llenando con agua a razón de 0.2 m^3/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ´esta se encuentra a 30 cm de profundidad?
18. Dos de los lados de un triángulo miden $4\ y\ 5\ m$ respectivamente, y el ángulo entre ellos crece a razón de 0.06 rad/seg. Calcule la proporción a la que el área del rectángulo se incrementa cuando en ángulo entre los dos lados de longitud constante es de $\pi/3$.
19. La $ley\ de\ Boyle$ establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V cumplen la ecuación $P\,V = C$, donde C es una constante. Suponga que en cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa una cantidad de 20 kPa/min. ¿En qué proporción disminuye el volumen en este instante?

Aproximaciones lineales y diferenciales.

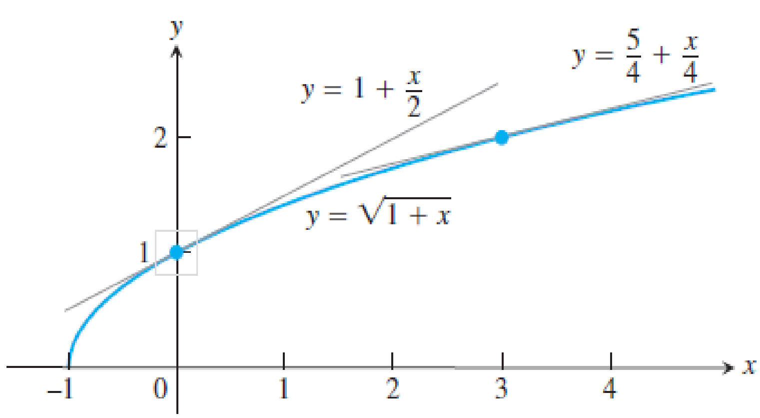
Dado que, gráficamente, una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente alrededor de su punto de tangencia, la idea en esta segunda parte es usar la recta tangente a la curva $y = f\,(x)$ en el punto $(a, f\,(a))$ como una aproximación para los valores de $f\,(x)$ cuando x es un número cercano a a. Así, si f es diferenciable en a, la función de aproximación
$(que\ es\ simplemente\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ curva\ y = f\,(x)\ en\ el\ punto\ (a, f\,(a)))$

$$L(x) = f\,(a) + fj(a)(x - a)$$

Se denomina $la\ Linealización\ de\ f\ \ en\ a$, y la aproximación

$$f\,(x) \approx L(x)\ de\ f\ \ por\ L\ es\ la\ aproximacion\ lineal\ de\ f\ \ en\ a.$$

Ejemplo. Encontrar la Linealización de $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = \sqrt{1+\mathrm{x}}$ en $\mathrm{x} = 0.$



$Como\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\ tenemos\ f'(0) = \frac{1}{2} \quad y \quad f(0) = 1$

$De\ modo\ que\ la\ linealización\ L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$

Notemos que la aproximación $\sqrt{x+1} \cong 1 + \frac{x}{2}$ es bastante precisa para valores de $x\ cercanos\ a\ 0$.

La utilidad de la Linealización radica en la posibilidad de reemplazar una fórmula complicada por una más sencilla en todo un intervalo de valores.

Las ideas tras las aproximaciones lineales son en ocasiones formuladas en términos de diferenciales. Si $y = f(x)$, donde f es una función diferenciable, entonces la diferencial dx es una variable independiente que puede tomar cualquier valor. La diferencial dy es definida en términos de dx mediante la siguiente ecuación:

$$dy = f'(x)dx$$

Así, dy es una variable dependiente; esta depende tanto de x como de dx.

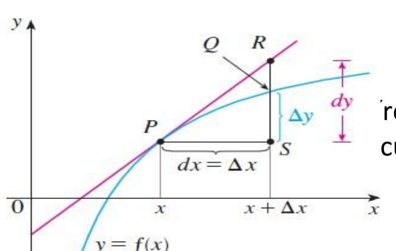
Para dar un significado geométrico a las diferenciales, considere la gráfica. Sean $P = (x, f(x))\ y\ Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ dos puntos sobre la gráfica de f y tome $dx = \Delta x$.

El correspondiente cambio en y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

La pendiente de la recta tangente a la curva en P es $f'(x)$ que la distancia entre los puntos R y S en la gráfica es $f'(x)dx = dy$. Por consiguiente, dy representa el incremento (o cambio) en la Linealización cuando x cambia en una cantidad dx, mientras que Δy es el incremento (o cambio) en f cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

En consecuencia, para valores pequeños de Δx, se tiene la aproximación $dy \approx \Delta y$, con lo que

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy.$$



rculo crece de r = 10 m a 10.1 m. Use dA para estimar el culo. Estimar el área del círculo agrandado y comparar la

Solución. Como $A = \pi r^2$, el incremento estimado es

$$dA = A'(r)dr = 2\pi(10m)(0{,}1m) = 2\pi\ m^2.$$

Por lo tanto, $A(10 + 0{,}1) \approx A(10) + 2\pi = \pi(10)2 + 2\pi = 102\pi$. Así, el área del círculo de radio 10.1 es aproximadamente $102\pi\ m^2$.

El área real es

$$A(10{,}1) = \pi(10{,}1)2 = 102{,}01\pi \ m^2.$$

El error en esta estimación es de $1.01\pi\, m^2$, que es la diferencia $\Delta A - dA$.

Cuando nos movemos de un punto a a un punto cercano $a + dx$, podemos escribir el cambio en f de tres maneras:

	Real	Estimado
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

Ejercicios.

1. Encuentre la linealización de la función en el punto a.
   (a) $f(x) = sen(x),\ a = {}^{\pi}/_{6}$
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}\,, a = 0$

2. Verifique la aproximación lineal dada en $a = 0$.

   (a) $\ln(1+x) \approx x$

   (b) $e^x \cos(x) \approx 1 + x$

   (c) $\tan(x) \approx x$

3. Resuelva los siguientes ejercicios.

   (a) Demuestre que la linealización de $f\ (x) = (1 + x)^k, con\ k \in R, en\ x = 0\ es\ L(x) = 1 + kx.$
   (b) Use la aproximación $(1+x)^k \approx 1 + kx$ para encontrar una aproximación de la función $f(x)$ para valores de x cercanos a 0
      i. $f(x) = (1-x)^6$

ii. $f(x) = \frac{2}{1-x}$

iii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

4. Encuentre el diferencial dy para cada una de las siguientes funciones.
   (a) $y = x^2 sen(x)$
   (b) $y = \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right)$
   (c) $y = \frac{1-v^2}{1+v^2}$
   (d) $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$
   (e) $y = 3csc\left(1 - 2\sqrt{x}\right)$
5. En los siguientes ejercicios, cada función f cambia su valor cuando $x\ cambia\ de\ x_0\ \ a\ x_0\ +\ dx$. Encuentre
   (a) El cambio $\Delta y = f(x_0\ + dx) - f(x_0)$
   (b) El valor de la estimación $dy = f'(x_0)dx$
   (c) El error de aproximación $|\Delta y - dy|$

      i. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3;\ x_0 = -1;\ dx = 0.1$

      ii. $f(x) = x^4;\ x_0 = 1;\ dx = -0.1$

      iii. $f(x) = \cos(\pi x)\,;\ x_0 = \frac{1}{3};\ dx = -0.02$
6. Use una aproximación lineal (o diferenciales) para estimar el número dado.
   (a) $(1.9999)^4$
   (b) $e^{-0.015}$
   (c) $\sqrt{99.8}$
   (d) $sec(0;08)$
7. La arista de un cubo fue medida y se encontró que su longitud era 30 cm con un posible error en la medida de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar la error máximo posible, el error relativo y el error porcentual en el cálculo de (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.
8. La circunferencia de una esfera fue medida como 84 cm pero con un posible error de 0.5 cm.
   (a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área de su superficie. ¿Cuál es el error relativo?
   (b) Use diferenciales para estimar el máximo error en el cálculo del volumen. ¿Cuál es el error relativo?
9. Use diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.