Taller tercer parcial de Cálculo 1 Anec.

Ejercicios sugeridos del texto guia para preparar el tercer parcial.

1 Regla de la cadena

1.1 Utilizar la Regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
2. $f(x) = \sqrt{5x^3+2x^2-8x+2}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(4x^5-2x^2)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+5x-4}{\sqrt{x^2+1}}$
5. $g(s) = \left(\dfrac{2s+5}{s^2+1}\right)^4$
6. $f(x) = (x^2-4)^5(3x+5)^4$
7. $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}$
8. $g(m) = \dfrac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}$
9. $f(x) = 6(5x^2+2)\sqrt{x^4+5}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{8x^2-3}{x^2+2}}$

1.2 Producto del ingreso marginal.

Definición 1 *(Texto guia pagina 519-520) "Ahora se utilizará lo aprendido en el cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Suponga que un fabricante emplea m personas para producir un total de q unidades de un producto por día. Se puede pensar que q es una función de m. Si r es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces r tambien puede considerarse una función de m. Así, se puede ver a $\frac{dr}{dm}$ como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada $\frac{dr}{dm}$ se llama* ***producto del ingreso marginal****. Es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando el fabricante emplea un trabajador adicional."*

1. Un fabricante determina que m empleados producirán un toral de q unidades de un producto por día, donde
$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}$$
Si la ecuación de demanda para el para el producto es $p = \dfrac{900}{q+9}$, determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$

2. Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que producen
$$q = 2m\left(2m+1\right)^{\frac{3}{2}}$$
unidades de producto diariamente. El ingreso total r (en dolares) esta dado por
$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000+3q}}$$
   (a) ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo mas cercano) cuando hay 12 trabajadores.?
   (b) Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.
   (c) Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

3. En cada uno de los siguientes casos, q es el número total de unidades producidas por día por m empleados de un fabricantes, y p es el precio de venta por unidad. En cada caso encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado m.
   (a) $q = 5m, \qquad p = -0.4q + 50; \qquad m = 6$
   (b) $q = \dfrac{200m - m^2}{20}, \qquad p = -0.1q + 70; \qquad m = 40$
   (c) $q = \dfrac{10m^2}{\sqrt{m^2+9}}, \qquad p = \dfrac{525}{q+3}; \qquad m = 4$
   (d) $q = \dfrac{100m}{\sqrt{m^2+19}}, \qquad p = \dfrac{4500}{q+10}; \qquad m = 9$

2 Derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales.

2.1 Calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $f\left(x\right) = \ln\left(5x-6\right)$
2. $f\left(x\right) = \ln\left(\dfrac{x^2+2x+8}{x^4+2x^2+1}\right)$

3. $f(x) = \ln\left(\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

4. $f(x) = \ln\left[\left(x^2+2\right)^2\left(x^3+x-1\right)\right]$

5. $f(x) = \left(x^2+1\right)\ln(2x+1)$

6. $f(x) = \ln\left(x^3\sqrt[4]{2x+1}\right)$

7. $f(x) = e^{x^2+x}$

8. $f(x) = x^2e^{-x}$

9. $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{3}$

10. $f(x) = e^{x^2\ln x}$

11. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)$

12. $f(x) = \ln\left(x^3e^x\sqrt{3x^2+9}\right)$

2.2 Aplicaciones

1. Encuentre la función de ingreso marginal si la funcion de demanda es $p = \dfrac{25}{\ln(q+2)}$

2. La función de costo total está dada dada por $c = 25\ln(q+1)+12$. Encuentre el costo marginal cuando $q = 6$

3. La función en dólares del costo promedio de un fabricante, está dado por

$$\overline{c} = \frac{500}{\ln(q+20)}$$

   Encuentre el costo marginal cuando $q = 50$.

4. La oferta de q unidades de un producto al precio de p dólares por unidad está dado por $q(p) = 25+10\ln(2p+1)$. Encuentre la tasa de cambio de la oferta con respecto al precio.

5. En cada uno de los siguientes casos $\overline{c}$ es el costo promedio de producir q unidades de un producto. Encuentre la función costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q. Interprete su respuesta.

   (a) $\overline{c} = \dfrac{7000e^{q/700}}{q}; \quad q = 350, \quad q = 700$

   (b) $\overline{c} = \dfrac{850}{q} + \dfrac{4000e^{(2q+6)/800}}{q}; \quad q = 97, \quad q = 197$

6. El ahorro S de un país (En miles de millones de dólares) está relacionado con e ingreso nacional I (En miles de millones de dólares) mediante la ecuación

$$S = \ln\left(\frac{5}{3+e^{-I}}\right)$$

   (a) Encuentre la propensión marginal al consumo como una función del ingreso.

   (b) Al millon más cercano, ¿cuál es el lingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de $\frac{1}{8}$?

3 Elasticidad de la demanda.

Definición 2 *Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, la* ***elasticidad puntual de la demanda****, denotada por la letra griega (eta), en (q, p) está dada por*

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q}\left(\frac{dq}{dp}\right)$$

1. En cada uno de los siguientes casos encuentre la elasticidad puntual de la ecuacion de demanda para los valores indicados de p o q y determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

   (a) $p = 40 - 2q; \quad q = 5$

   (b) $p = \frac{500}{q+2}; \quad q = 104$

   (c) $p = 150 - e^{q/100}; \quad q = 100$

   (d) $q = \sqrt{500 - p}; \quad p = 400$

   (e) $q = \sqrt{2500 - p^2}; \quad p = 20$

   (f) $q = \frac{1}{2}(p - 100)^2; \quad p = 20$

   (g) $q = p^2 - 50p + 850; \quad p = 20$

2. Para la ecuación de demanda lineal $p = 13 - 0.05q$, verifique que la demanda es elástica cuando $p = 10$, inelástica cuando $p = 3$, y tiene elasticidad unitaria cuando $p = 6,5$.

3. ¿Para que valor o valores de q las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

   (a) $p = 36 - 0.25q$

   (b) $p = 300 - q^2$

4. La ecuación de demanda para un producto es $q = 500 - 40p + p^2$ donde p precio por unidad (en dólares) y q es la cantidad de undidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 15$. Si este precio de 15 se incrementa en 1%, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

5. La ecuación de la demanda para un cierto producto es $q = \sqrt{2500 - p^2}$ donde p está en dólares. Encuentre la elasticidad de la demanda cuando $p = 30$ y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda, si el precio de \$30 baja a 28.50.

6. La ecuación de la demanda de un producto es $q = \sqrt{100 - p}$ donde $0 < p < 100$.

   (a) Encuentre todos los precios que corresponden a la demanda elástica.

   (b) Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 40$. Use su respuesta para estimar el aumento o la disminución porcental de la demanda cuando e precio el 5% hasta $p = 42$.

4 Ejercicios variados

1. Calcular la derivada y' de la función $y = \dfrac{(2x+1)^3 (x+3)^2}{(x^3-5)^5}$

2. Si $y = (5u+6)^3$ y $u = (x^2+1)^4$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ cuando $x = 0$.

3. Encuentre la pendiente a la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^2$ en el punto $(8, 0)$.

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2}$ en el punto $(3, 1)$

5. Si la ecuación de demanda del producto de un fabricante es $p = \dfrac{100}{q+5}$ donde p esta en dólares, encuentre la función ingreso marginal y evalúela cuando $q = 45$.

6. Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es $\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \dfrac{500}{q}$ encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades.

7. El costo de producir q unidades de un producto está dado por $c(q) = 5500 + 12q + 0.2q^2$. Si el precio de p unidades está dado por $q = 900 - 1.5p$. utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 85$.

8. Si $r(q) = q(20 - 0.1q)$ es la función ingreso total, encuentre la función ingreso marginal.

9. Si $c(q) = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$ es la función de costo total, encuetre el costo marginal cuando $q = 100$.

10. Si $p = 500 - 0.1q$ es una ecuación de demanda, encuentre la función ingreso marginal.

11. Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que producen

$$q = 2m\,(2m+1)^{\frac{3}{2}}$$

unidades de un producto diariamente. El ingreso total r en dólares está dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000+3q}}$$

(a) Cuál es el precio por unidad cuando hay 12 trabajadores?

(b) Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.

(c) Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

12. Un fabricante determinó que para su producto el costo promedio diario en cientos de dólares está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2+35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$$

(a) Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.

(b) El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementan en 18 unidades diarias, el ingreso crecería a \$275. ¿Debería realizar este aumento? ¿Por que?