UNIVERSIDAD DEL NORTE

Taller 1 de Ecuaciones Diferenciales MAT 4011 202010

February 7, 2020

Departamento de Matemáticas y Estadística

Los ejercicios propuestos en el siguiente taller son tomados, en su mayoría, del texto guía de la asignatura: Zill, Dennis. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones al modelado*, décima edición, Cengage Learning. Este taller se propone como material de apoyo al estudio y preparación para el primer parcial de la asignatura.

---

1. Halle la solución general de las ecuaciones de variables separables dadas a continuación. Si existen, halle también las soluciones de equilibrio de dichas ecuaciones.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)^3$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

   (c) $dy - (y-1)^2 dx = 0$

   (d) $\left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2 \dfrac{dy}{dx} = y \ln x$

   (e) $\operatorname{sen}(3x)\, dx + 2y \cos^3(3x)\, dy = 0$

   (f) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{3y+2}{5x+4}\right)^2$

   (g) $x\sqrt{1+y^2}\, dx = y\sqrt{1+x^2}\, dy$

   (h) $\dfrac{dP}{dt} = 2P - P^2$

   (i) $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

   (j) $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

---

2. Halle una solución para cada uno de los problemas de valor inicial (P.V.I) dados a continuación. De ser posible, exprese la solución en forma explícita.

   (a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \\ y(2) = -1. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \\ y(2) = 2. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy, \\ y(-1) = -1. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} (1+x^4)\, dy + x(1+4y^2)\, dx = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{sen}(x^2), \\ y(-2) = 1/3. \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{sen}(x^2), \\ y(-2) = 0. \end{cases}$

---

3. Determine la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden propuestas a continuación.

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

(c) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$

(d) $xy' + (1+x)y = e^{-x}\mathrm{sen}(2x)$

(e) $\cos^2 x \,\mathrm{sen}\, x \dfrac{dy}{dx} + (\cos^3 x)y = 1$

(f) $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

(g) $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2$

(h) $\cos x \dfrac{dy}{dx} + (\mathrm{sen}\, x)y = 1$

(i) $x\,dy - 4(x^6 + y)\,dx = 0$

(j) $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$

---

4. Halle la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

(a) $\begin{cases} xy' + y = e^x, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \\ y(1) = 10. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (x^2-9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (x^2-9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0, \\ y(-5) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (x^2-9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0, \\ y(-5) = 1. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 2xy = 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

---

5. En cada caso determine si la ecuación diferencial dada es exacta o no. En los casos en que sea exacta, halle la solución general de la ecuación.

(a) $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$

(b) $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right) dx = (1 - \ln x)\,dy$

(c) $(y\ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\dfrac{1}{y} + x\ln y\right) dy = 0$

(d) $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1+9x^2}\right) dx + x^3y^2dy = 0$

(e) $\left(x + \arctan\left(\dfrac{y}{2}\right)\right) dx + \dfrac{2x+y}{4+y^2}dy = 0$

(f) $(4t^3y - 15t^2 - y)\,dt + (t^4 + 3y^2 - t)\,dy = 0$

---

6. Resolver cada uno de los PVI dados a continuación.

(a) $\left(\dfrac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy\right)\dfrac{dy}{dx} = y\,(y + \sin x),\;\; y(0) = 1.$

(b) $y^2 e^y \cos x \, dx + (y^2 + 2y) \sin(x) \, e^y \, dy = 0, \quad y(\pi/2) = 2.$

(c) $(\tan x - \sin x \sin y) \; dx + \cos x \cos y \, dy = 0, \quad y(0) = \pi/6.$

---

7. Determine el valor de k para el cual la ED dada es exacta y resuelva la ecuación para el correspondiente valor de k.

(a) $(x^2 + kxy^4 + y^3) \, dx + (3xy^2 + 20x^2y^3 + y^4) \, dy = 0$

(b) $(5x + 6xy^3 + \cos y) \, dx + (1 + 2kx^2y^2 - x \sin y) \, dy = 0$

---

8. Verifique que la ED dada no es exacta, determine un factor integrante adecuado y úselo para resolver la ED.

(a) $(2y^2 + 3x) \; dx + 2xy \, dy = 0$

(b) $y\,(x + y + 1) \; dx + (x + 2y) \; dy = 0$

(c) $6xy \, dx + (4y + 9x^2) \; dy = 0$

(d) $\cos x \, dx + \left(1 + \dfrac{2}{y}\right) \sin x \, dy = 0$

(e) $(y^2 + xy^3) \; dx + (5y^2 - xy + y^3 \sin y) \; dy = 0$

(f) $(x^2 + y^2 - 4) \; dx + (y + xy) \; dy = 0$

---

9. Las siguientes ecuaciones admiten un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^a y^b$. Determine los valores exactos de a y b en cada caso, y halle la solución general de la correspondiente ecuación.

(a) $(2x^2y + y^2) \, dx + (2x^3 - xy) \, dy = 0.$

(b) $(3x^4y - 2x^2y^3) \, dx - (4x^3y^2 + 2x^2y^2) \, dy = 0.$

(c) $(-xy \sin x + 2y \cos x) \, dx + 2x \cos x \, dy = 0.$

---

10. Verifique que $\mu(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2}$ es un factor integrante para la ecuación diferencial

$$(x^2 + 2xy - y^2) \, dx + (y^2 + 2xy - x^2) \, dy = 0.$$

Halle la solución general de dicha ecuación diferencial.

---

11. En los siguientes ejercicios determine un factor integrante adecuado para la ecuación diferencial dada y resuelva el problema de valor inicial propuesto.

   (a) $x\,dx + (x^2y + 4y)\,dy = 0, \quad y(4) = 0.$
   (b) $(x^2 + y^2 - 5)\,dx = (y + xy)\,dy, \quad y(0) = 1.$

---

12. Resuelva las siguientes ecuaciones homogéneas.

   (a) $(2x^2 + y^2)dx - x^2dy = 0.$
   (b) $(3y^2 + 4xy - x^2)dx - (2x^2 + 2xy)dy = 0.$
   (c) $(x^3 - x^2y - 10xy^2 - 3y^3)dx + (3xy^2 + 7x^2y)dy = 0.$
   (d) $(3x^3 - 3x^2y - 6xy^2 - y^3)dx + (xy^2 + 5x^2y)dy = 0.$
   (e) $[4x\cos(y/x) - 3x\sin(y/x) - y]dx + xdy = 0.$
   (f) $x(2y^4 - x^4)\dfrac{dy}{dx} = y(y^4 - x^4).$
   (g) $(x^2y - xy^2 + y^3)dx + (x^3 + x^2y + xy^2)dy = 0.$
   (h) $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0.$
   (i) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy.$
   (j) $(x + y\sin(y/x))\,dx - x\sin(y/x)dy = 0.$
   (k) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0.$
   (l) $(4x^2 - xy + y^2)dx + (x^2 - xy + 4y^2)dy = 0.$

---

13. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando una sustitución conveniente.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}.$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x + y).$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}.$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}.$
   (e) $xy' = y\ln(xy).$

---

14. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

(a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{6}{x^2-1}y = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}y^{2/3}$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} + 2(\cot x)y = 4(\cos x)y^{1/2}$.

(c) $(2x^2y^2\ln x - y)dx + x\ln x\, dy = 0$.

(d) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{(x\sin x + \cos x)^2}y^{-1}$.

(e) $-2\dfrac{dy}{dx} + (\ln x)y = \ln x\left[\dfrac{2}{x} + (\ln x)^2\right]y^3$.

(f) $\dfrac{dz}{dx} - (2\tan x)z = z^2$.

(g) $\dfrac{dz}{dx} - (2\csc x + \cot x)z = (\csc^2 x)z^2$.

(h) $(x^2+1)\sqrt{y}\dfrac{dy}{dx} = xe^{3x/2} + (1-x^2)y\sqrt{y}$.

(i) $6(x^2+1)y^2\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 + 2y^3 = 0$.