ATB

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
TERCER PARCIAL DE CÁLCULO I

Nombre:________________________________ Abril 25 de 2.019

Duración del parcial: 90 minutos **AAAAA**

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos II, III y IV para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

(I) **Valoración 2.0 pts.** Seleccione la única opción correcta ($N.A.$ significa ninguna de las anteriores).

1. Las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 11$ en los puntos correspondientes a $x = 2$ son:
   (a) $m = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $m = \pm\frac{2}{\sqrt{7}}$ (c) $m = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ (d) $N.A.$
2. Los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal son:
   (a) $(1,3)$ y $(2,6)$ (b) $(0,2)$ y $(3,6)$ (c) $(0,2)$ y $(2,6)$ (d) $N.A.$
3. El valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{k+x}{x^2}$ tenga pendiente $m = 5$ en $x = 2$ es
   (a) $k = -6$ (b) $k = -4$ (c) $k = -8$ (d) $N.A.$
4. Sabemos que $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$. Luego, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = xarctan(x)$ en el punto donde $x = 1$ es igual a
   (a) $y = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{2}$ (b) $y = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}$ (c) $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2}$ (d) $N.A.$

(II) **Valoración 1.0 pt.** Encuentre la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$.

(III) **Valoración 1.0 pt.** Hallar la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = x(x-1)^x$.

(b) $f(x) = senh\left(\sqrt{ln(x^2+1)}\right)$.

(IV) **Valoración 1.0 pt.** La función de posición de un objeto, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de 144 m es $s(t) = 144 - 4t^2$ donde s se mide en metros y t en segundos.

(a) ¿Cúal es la velocidad instantánea en $t = 3$ s?

(b) ¿En que instante la pelota golpea al suelo?

(c) ¿Cúal es la velocidad de impacto?

Éxitos

ATD

- Solución del inciso II.

Consideremos inicialmente $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ahora, $f(-1) = a - b + c = -11$. Por otra parte, $f'(x) = 2ax + b$ y $f'(-1) = -2a + b = 7$. Además, $f''(x) = 2a$ y $f''(-1) = 2a = -4$.

De la última ecuación obtenemos $\boxed{a=-2}$. Reemplazando $a=-2$ en la ecuación $-2a+b=7$ obtenemos $\boxed{b=3}$. Por último, reemplazando $a=-2$ y $b=3$ en la ecuación $a-b+c=-11$ se tiene que $\boxed{c=-6}$.

Por lo tanto, la función cuadrática buscada es $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$.

- Solución del inciso III.

a) $y = x(x-1)^x$. Aplicando $\ln$ en ambos lados tenemos

$$\ln y = \ln x + x \ln(x-1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$

$$\Rightarrow y' = x(x-1)^x \left[\frac{1}{x} + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} \right]$$

b) $f(x) = \operatorname{Senh}\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}\right)$.

$$f'(x) = \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}} \operatorname{Cosh}\left(\sqrt{\ln(x^2+1)}\right).$$

• Solución del inciso III. ATB

a) Tenemos que $V(t) = s'(t) = -8t$ es la función velocidad. Ahora, $V(3) = -24$. Así que la velocidad instantánea en $t = 3$ s es -24 m/s.

b) El objeto golpea al suelo cuando $s(t) = 0$, esto es,

$$144 - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 = 144 \Leftrightarrow t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm 6.$$

Puesto que no podemos considerar el tiempo negativo, tenemos que $t = 6$

Por lo tanto, el objeto golpea al suelo a los 6 s después de haberse dejado caer.

c) Por el inciso b) tenemos que $V(6) = -48$. Así que la velocidad de impacto del objeto es -48 m/s.

ATB

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
TERCER PARCIAL DE CÁLCULO I

Nombre: ______________________________ Abril 26 de 2.019

Duración del parcial: 90 minutos CCCCC

Observaciones: Resolver de forma **clara y detallada** los incisos *II*, *III* y *IV* para obtener la mayor valoración. Durante el parcial no está permitido (**hacerlo es causal de anulación**): Manipulación de celulares o relojes con cámara, hablar o prestar algún material con sus compañeros, utilizar calculadoras con lenguaje simbólico y el uso de libros o notas de clase.

NO SE ACEPTAN PREGUNTAS

CUESTIONARIO

(*I*) **Valoración 2.0 pts.** Seleccione la única opción correcta (*N.A.* significa ninguna de las anteriores).

1. Si $x^2 + y^2 = 4$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2}$ es igual a
   (a) $-\frac{5}{y^3}$ (b) $\frac{3}{y^3}$ (c) $-\frac{4}{y^3}$ (d) N.A.

2. Los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal son:
   (a) $(-2, 21)$ y $(1, -6)$ (b) $(3, 22)$ y $(1, 6)$ (c) $(1, 6)$ y $(2, 7)$ (d) N.A.

3. El valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{k+x}{x^2}$ tenga pendiente $m = 5$ en $x = 2$ es
   (a) $k = -16$ (b) $k = -6$ (c) $k = -8$ (d) N.A.

4. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ en el punto donde $x = 1$ es igual a
   (a) $y = \frac{1}{4}x$ (b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ (c) $y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{5}$ (d) N.A.

(*II*) **Valoración 1.0 pt.** Hallar un polinomio P de segundo grado que satisfaga las condiciones siguientes: $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ y $P''(2) = 2$.

(*III*) **Valoración 1.0 pt.** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifique tanto como sea posible.

(a) $f(x) = x^{x^x}$

(b) $f(x) = cosh\left(ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$

(*IV*) **Valoración 1.0 pt.** La función de posición de un objeto, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de 122.5 m es $s(t) = 122{,}5 - 4.9t^2$ donde s se mide en metros y t en segundos.

(a) ¿Cúal es la velocidad instantánea en $t = 2$ s?

(b) ¿En que instante la pelota golpea al suelo?

(c) ¿Cúal es la velocidad de impacto?

Éxitos

ATB

• Solución del inciso II.

El polinomio P debe ser de la forma $P(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b y c son constantes que debemos obtener. Luego, por hipótesis $P(2)=4a+2b+c=5$. Por otro lado,

$P'(x)=2ax+b$ y $P'(2)=4a+b=3$. Además,

$P''(x)=2a$ y $P''(2)=2a=2$.

De la última igualdad obtenemos que $\boxed{a=1}$ y reemplazando éste valor en $4a+b=3$, obtenemos $\boxed{b=-1}$.

Reemplazando $a=1$ y $b=-1$ en $4a+2b+c=5$ tenemos que $\boxed{c=3}$

Por lo tanto, el polinomio buscado es $P(x)=x^2-x+3$.

• Solución del inciso III.

a) $f(x)=x^{x^x}$.

Hallemos inicialmente la derivada de la función $y=x^x$.

$\ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln x+1 \Rightarrow y'=x^x(1+\ln x)$

Por otra parte, tomando ahora $y=x^{x^x}$ tenemos

$\ln y = x^x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=(x^x)'\ln x+(\ln x)'x^x$.

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=x^x(1+\ln x)\ln x+\frac{x^x}{x}=x^x\left[(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \left(x^{x^x}\right)'=x^{x^x}\cdot x^x\left[(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}\right]=x^{x^x}\left[x^x\ln x(1+\ln x)+x^{x-1}\right].$$

ATB

b) $f(x) = \cosh\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$f'(x) = \operatorname{Senh}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\operatorname{Senh}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+1}.$$

• Solución del inciso IV.

a) Tenemos que la función velocidad es $v(t) = s'(t) = -9.8t$. Ahora, $v(2) = -9.8(2) = -19.6$. En consecuencia, la velocidad instantánea en $t = 2$ s es -19.6 m/s.

b) La pelota golpea al suelo cuando $s(t) = 0$ para un cierto t, esto es,

$$122.5 - 4.9t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{122.5}{4.9} \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5.$$

Dado que no podemos considerar el tiempo negativo, se cumple que la pelota golpea al suelo a los 5 s después de dejarse caer.

c) Siguiendo los incisos a) y b) tenemos que $v(5) = -49$. Por lo tanto la velocidad de impacto es -49 m/s.

Tercer Parcial Calculo 1. Tema A

Prof. Clara Lucía Aldana D

April 24, 2019

Nombre y código: ____________________

Instrucciones. El examen es individual. Las respuestas requieren demostración o justificación completa. Fraude implica sanciones disciplinarias. **Respuesta sin justificación no recibirá más del 10% de su valor original**. Escriba su nombre en todas las hojas que entregue. Tiempo máximo: 100 minutos. Calificación máxima: 5.0. En este parcial 50 puntos dan 5.0.

Durante el exámen no está permitido:

- Hablar con otros estudiantes. Prestar material a otros estudiantes.
- El uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico, notas de clase, textos, ni aparatos electrónicos.
- El uso o posesión de teléfonos celulares.

Infringir cualquiera de estas normas es causal de anulación del examen.

1. (5 puntos) Dibuje la gráfica de una función g que sea continua y tal que los puntos $(2,0)$, $(3,1)$ y $(4,0)$ pertenezcan a la gráfica de g y la pendiente de las rectas tangentes a la grafica de g estos puntos sean -1, 0, 1 respectivamente. g no debe ser derivable en $x=0$.

2. (10 puntos) Use diferenciación logarítmica para calcular la derivada de la siguiente función $y = \frac{(x-1)^6(x+5)^{1/3}}{(x^2+2)^7(x+1)^4}$

3. (10 puntos) Use diferenciación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ en el punto $(-1,-1)$

4. (12 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:
   (a) $y = 13^{x^5+2}\ln(4x^4)$
   (b) $y = x^{\cos x}$
   (c) $y = \frac{\log_2(3x^2-x)}{x^2+2}$
   (d) $\arctan(\sqrt{2x})$

5. (10 puntos) Dada la función $f(x) = (1-x)e^x$, halle los puntos en los que
   (a) La graf(f) tiene una tangente horizontal.
   (b) Halle la ecuación de estas tangentes.
   (c) Halle los intervalos en los cuales $f'(x) < 0$
   (d) Tome $x = 2$, calcule $f(2)$ y $f'(2)$. Dé un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $2 \in I$ y f restringida a I es invertible. Justifique.
   (e) Ponga $c = f(2)$ con lo cual $f^{-1}(c) = 2$. Calcule $(f^{-1})'(c)$. Justifique.

6. (5 puntos) Compruebe la ecuación $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ se satisface para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Tercer Parcial Calculo 1. Tema B

Prof. Clara Lucía Aldana D

April 24, 2019

Nombre y código: ______________________________

Instrucciones. El examen es individual. Las respuestas requieren demostración o justificación completa. Fraude implica sanciones disciplinarias. **Respuesta sin justificación no recibirá más del 10% de su valor original.** Escriba su nombre en todas las hojas que entregue. Tiempo máximo:. 100 minutos. Calificación máxima: 5.0. En este parcial 50 puntos dan 5.0.
Durante el exámen no está permitido:

- Hablar con otros estudiantes. Prestar material a otros estudiantes.
- El uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico, notas de clase, textos, ni aparatos electrónicos.
- El uso o posesión de teléfonos celulares.

Infringir cualquiera de estas normas es causal de anulación del examen.

1. (5 puntos) Dibuje la gráfica de una función g que sea continua y tal que los puntos $(1,0)$, $(2,1)$ y $(3,0)$ pertenezcan a la gráfica de g y la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de g en estos puntos sean 1, 0, -1 respectivamente. g no debe ser derivable en $x=0$

2. (10 puntos) Use diferenciación logarítmica para calcular la derivada de la siquiente función $y = \frac{(x+3)^7(x-3)^{1/5}}{(x^2+5)^6(x+1)^3}$

3. (10 puntos) Use diferenciación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + y^2 = 3$ en el punto $(1,1)$

4. (12 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:
   (a) $y = 12^{x^4-3}\ln\sqrt{x+1}$
   (b) $y = x^{\sin x}$
   (c) $y = \frac{\log_2(3x^2-x)}{x^4+5}$
   (d) $\arctan(e^{-2x})$

5. (10 puntos) Dada la función $f(x) = (1-x)e^x$, halle los puntos en los que
   (a) La graf(f) tiene una tangente horizontal.
   (b) Halle la ecuación de estas tangentes.
   (c) Halle los intervalos en los cuales $f'(x) > 0$
   (d) Tome $x=-2$, calcule $f(-2)$ y $f'(-2)$. Dé un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $-2 \in J$ y f restringida a J es invertible. Justifique.
   (e) Ponga $b = f(-2)$ con lo cual $f^{-1}(b) = -2$. Calcule $(f^{-1})'(b)$. Justifique.

6. (5 puntos) Compruebe la ecuación $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ se satisface para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Solución Tercer parcial Calculo 1. Tema A. I. 2019

1. Dibuje la gráfica de una función g tal que

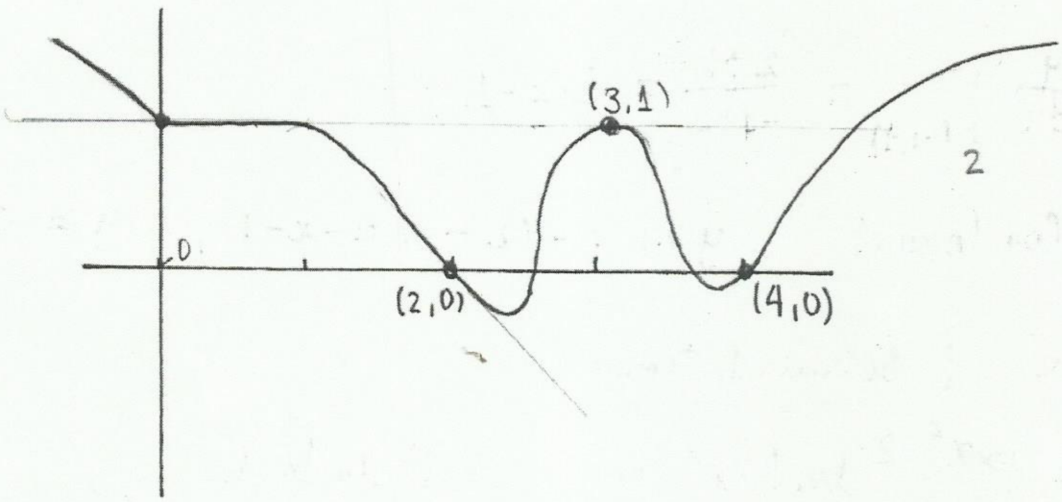
g es continua

$g(2) = 0$, $g(3) = 1$, $g(4) = 0$ 1

$g'(2) = -1$, $g'(3) = 0$ $g'(4) = 1$ 1

g no es derivable en $x = 0$ 1

g no continua en x = 0 - 0.5



2

2. Usar diferenciación logarítmica para calcular y'

Aplicar ln 2
Prop log 2
Deriv 4
Deriv log 2 - $\frac{y'}{y}$
Deriv 2
Exp final 2

$$y = \frac{(x-1)^6\ (x+5)^{1/3}}{(x^2+2)^7\ (x+1)^4}$$

$$\ln(y) = 6\ln(x-1) + \frac{1}{3}\ln(x+5) - 7\ln(x^2+2) - 4\ln(x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(x)\left(\frac{6}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+5} - 7\frac{2x}{x^2+2} - 4\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{(x-1)^6 (x+5)^{1/3}}{(x^2+2)^7 (x+1)}\left(\frac{6}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+5} - \frac{14x}{x^2+2} - \frac{4}{x+1}\right)$$

3. Usar diferenciación implícita para hallar la tangente a la curva $x^2+xy+y^2=3$ en el punto $(-1,-1)$

Derivando implícitamente:

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

(Igual que en la solución del tema B) : $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)} = \frac{2+1}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$$

Con lo cual $y+1 = -(x+1) = -x-1$, $y = -x-2$

4. Derivar (Similar al tema B)

a) $y = 13^{x^5+2}\ln(4x^4)$

Producto 1
Derivadas 1 + 1.

$$y' = \ln(13)\,13^{x^5+2}\,5x^4\ln(4x^4) + 13^{x^5+2}\left(\ln(4)+4\ln(x)\right)'$$
$$= 5\ln(13)\,13^{x^5+2}x^4\ln(4x^4) + 13^{x^5+2}\frac{4}{x}$$

b) $y = x^{\cos(x)}$ (Ver b) Tema B)

$$y' = x^{\cos(x)}\left(-\mathrm{sen}(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}\right)$$

c) $y = \frac{\log_2(3x^2-x)}{x^2+2}$

cociente 1
Derivadas 1 + 1.

$$y' = \frac{1}{(x^2+2)^2}\left(\frac{1}{\ln(2)}\frac{(6x-1)(x^2+2)}{3x^2-x} - 2x\log_2(3x^2-x)\right)$$

d) $y = \arctan(\sqrt{2x})$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+2x}}_{1.5} \times \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x}} \times 2}_{1.5} = \frac{1}{1+2x}\,\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

5) Dado $f(x) = (1-x)e^x$

a) Hallar los puntos en los que graf(f) tiene una tangente horizontal

1 $f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

Para hallar una tangente horizontal se hace $f'(x)=0$

1 $-xe^x = 0$ como $e^x \neq 0\ \forall x$ esto implica $x=0$

Con lo cual solo hay una tangente horizontal en $x=0$

b) Hallar la ecuación de esta tangente

Pendiente es $m=0$ y el punto es $(0,1)$

2 $y-1 = 0(x-0)$. $y=1$ es la ecuación de la recta tangente horizontal.

c) Hallar los intervalos en los cuales $f'(x)<0$

Buscamos $f'(x) = -xe^x < 0$ con lo cual $-x<0$

2 $\Leftrightarrow x>0$. Por lo tanto $f'(x)<0$ en $]0,\infty[$

d) $f(2) = (1-2)e^2 = -e^2$ 0.5

$f'(2) = -2e^2$ 0.5

$2>0$ y $f'(x)<0$ en $]0,\infty[$, así que cualquier

$I \subset]0,\infty[$, $2 \in I$ sirve.

Puede ser $I =]0,\infty[$ o $I =]1,3[$ etc. 1

e) $c = f(2) = -e^2$, $f^{-1}(-e^2) = 2$ Calcular

2 $(f^{-1})'(c) = (f^{-1})'(-e^2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(-e^2))} = \dfrac{1}{f'(2)}$

$= \dfrac{1}{-2e^2} = -\dfrac{e^{-2}}{2}$

6. Comprobar que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cosh(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 1

$\cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x) = \frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2$ 1

$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^xe^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^xe^{-x} + e^{-x2})\right)$ 1 cuadrado

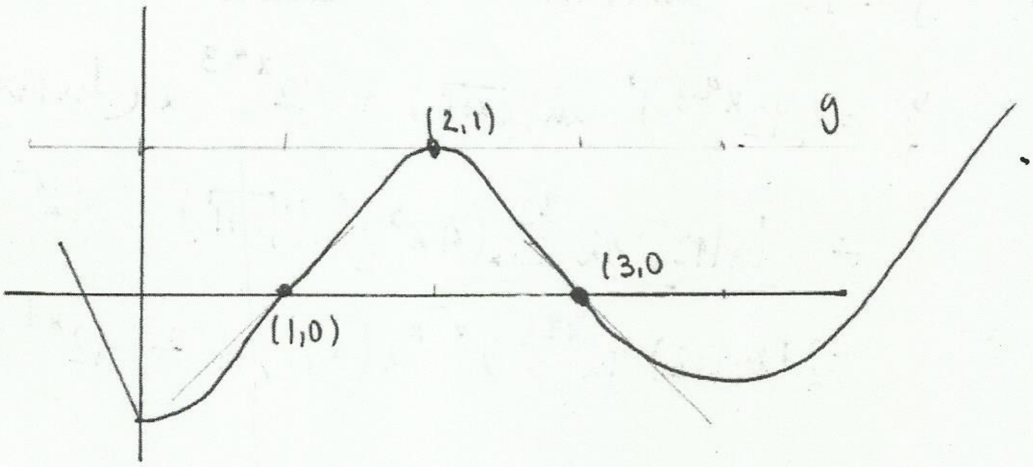
$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right)$ 1 simplificar

$= \frac{1}{4}(4) = 1$. 1

Tema B

1. g continua, $g(1)=0$, $g(2)=1$ $g(3)=0$

$g'(1)=1$ $g'(2)=0$ $g'(3)=-1$



2. Usar diferenciación loritmica para calcular y'

$$y=\frac{(x+3)^7 (x-3)^{1/5}}{(x^2+5)^6 (x+1)^3}$$

$$\ln(y) = 7\ln(x+3) + \frac{1}{5}\ln(x-3) - 6\ln(x^2+5) - 3\ln(x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(x)\left(\frac{7}{x+3} + \frac{1}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{6(2x)}{x^2+5} - \frac{3}{x+1}\right)$$

$$= \frac{(x+3)^7 (x-3)^{1/5}}{(x^2+5)^6 (x+1)}\left(\frac{7}{x+3} + \frac{1}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{12x}{x^2+5} - \frac{3}{x+1}\right)$$

3. Hallar tangente a la curva $x^2+xy+y^2=3$ en el punto (1,1).

Derivando implicitamente obtenemos:

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Big\} 3$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y) = -2x-y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y} \Big\} 2$$

$$\wedge \Big\} \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1)} = \frac{-2-1}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1 \leftarrow$$ la pendiente de la tangente

Con lo cual la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ es

$$y-1 = -1(x-1) = -x+1 \quad . \quad y = -x+2 \quad \}4$$

4. Derivar

a) $y = 12^{x^4-3} \ln(\sqrt{x+1})$ Producto

$$y' = (12^{x^4-3})' \ln(\sqrt{x+1}) + 12^{x^4-3} \times (\ln(\sqrt{x+1}))' \quad 1$$

$$= \underbrace{\ln(12)\, 12^{x^4-3} \cdot (4x^3)}_{1} \ln(\sqrt{x+1}) + 12^{x^4-3} \left(\tfrac{1}{2}\ln(x+1)\right)'$$

$$= 2\ln(12)\, 12^{x^4-3}\, x^3 \ln(x+1) + \underbrace{\tfrac{1}{2}\, 12^{x^4-3} \frac{1}{x+1}}_{1}$$

b) $y = x^{\sin(x)}$ exponencial base función, exponente una función

$$\ln(y) = \ln(x^{\sin(x)}) = \sin(x)\ln(x) \quad 1$$

$$\frac{y'}{y} = \cos(x)\ln(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \quad 1$$

$$y' = x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \quad 1$$

Alternativa

$$y = x^{\sin(x)} = (e^{\ln(x)})^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\ln(x)\operatorname{sen}(x)}$$

$$y' = e^{\ln(x)\operatorname{sen}(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)$$

$$= x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)$$

c) $y = \dfrac{\log_2(3x^2-x)}{x^4+5}$ cociente

$$y' = \frac{(\log_2(3x^2-x))' \cdot (x^4+5) - \log_2(3x^2-x)(x^4+5)'}{(x^4+5)^2} \quad 1$$

$$= \frac{1}{(x^4+5)^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{3x^2-x} \times (6x-1)(x^4+5)}_{1} - \underbrace{\log_2(3x^2-x)\,4x^3}_{1}$$

$$= \frac{1}{(x^4+5)^2}\left(\frac{1}{\ln(2)}\frac{(6x-1)(x^4+5)}{3x^2-x} - 4x^3\log_2(3x^2-x)\right)$$

d) $y = \arctan(e^{-2x})$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+(e^{-2x})^2}}_{1.5} \times \underbrace{e^{-2x} \times (-2)}_{1.5} = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-4x}}$$

5) Puntos a) y b) iguales al Tema A.

c) Hallar los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

$f'(x) = -xe^x > 0$ sii $-x > 0$ sii $x < 0$

Entonces $f'(x) > 0$ en $]-\infty, 0[$.

d) $f(-2) = (1-(-2))e^{-2} = 3e^{-2}$, $f'(-2) = 2e^{-2}$

Dar $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $-2 \in J$ y $f|_J$ es invertible.

$-2 < 0$ y $f'(x) > 0$ en $]-\infty, 0[$. así que cualquier

$J \subset]-\infty, 0[$ con $2 \in J$ sirve. Puede ser

$J =]-\infty, 0[$ o $J =]-3, -1[$, etc.

Tema B

e) $b = f(-2) = 3e^{-2}$, $f^{-1}(b) = f^{-1}(3e^{-2}) = -2$

Calcular

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(3e^{-2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3e^{-2}))} = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{2e^{-2}}$$

$$(f^{-1})'(3e^{-2}) = \frac{e^2}{2}$$

6) Igual al Tema A.

Tema B

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
TERCER PARCIAL

INSTRUCCIONES:	a)	Duración: 100 minutos.
	b)	La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
	c)	Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente

JR 2019-10

FILA A

Ejercicio 1.-[1.5 puntos]

Halle todos los puntos $(a, f(a))$ de la gráfica de $f(x) = x + 2\,\text{sen}\,x$ donde la recta tangente sea paralela al eje x

Ejercicio 2.-[2.0 puntos]

(a) **[1.0 puntos**]Calcular la derivada de la función $(\text{arcsen}\,x)^{\arctan x}$

(b)**[1.0 puntos**] Calcular la derivada de la función $(\cos x)^{(\text{arcsen}\,x)}$

Ejercicio 3.-[1.5 puntos] Calcular el siguiente limite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}.$$

J. Rodriguez

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
CALCULO I
SOLUCIÓN TERCER PARCIAL JR 2019-10

SOLUCIÓN

Ejercicio 1.
Como $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$, la pendiente de la recta tangente paralela al eje x es $m = 0$, así que $f'(x) = 0$ en esos puntos. entonces $1 + 2\cos x = 0$, luego $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, así que $x \in \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$ y $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$, y, $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Por lo tanto los puntos donde la recta tangente es paralela al eje x son:

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \text{ y } \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

Ejercicio 2.

(a) Sea $f(x) = (\operatorname{arcsen} x)^{\arctan x} = e^{\arctan x \ln(\operatorname{arcsen} x)}$ así que

$$f'(x) = e^{\arctan x \ln(\operatorname{arcsen} x)}(\arctan x \ln(\operatorname{arcsen} x))'$$

$$= e^{\arctan x \ln(\operatorname{arcsen} x)}\left(\frac{1}{1+x^2}\ln(\operatorname{arcsen} x) + \arctan x \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\operatorname{arcsen} x}\right)$$

$$= (\operatorname{arcsen} x)^{\arctan x}\left(\frac{\ln(\operatorname{arcsen} x)}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{\operatorname{arcsen} x\sqrt{1-x^2}}\right)$$

(b) Sea $f(x) = (\cos x)^{(\operatorname{arcsen} x)} = e^{\operatorname{arcsen} x \ln(\cos x)}$

$$f'(x) = e^{\operatorname{arcsen} x \ln(\cos x))}(\operatorname{arcsen} x \ln(\cos x))'$$

$$= e^{\operatorname{arcsen} x \ln(\cos x)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(\cos x) + \sqrt{1-x^2}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= (\cos x)^{(\operatorname{arcsen} x)}\left(\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\tan x\right)$$

Ejercicio 3.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} &= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{RH}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} \\
&= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{RH}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{1+1}{-1} = -2
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

PARCIAL III - CALCULO I   APRIL 26, 2019   DV

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre completo ______________________________

1. Obtenga (en el caso de existir) los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función dada es paralela al eje x. Obtenga por lo menos una de las ecuaciones de dichas rectas.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - 6x$$

2. En cada caso la función o ecuación se supone definida para todo x real. Utilice las propiedades básicas y/o reglas o procedimientos de diferenciación para hallar $y'(x)$:

   a) $y = \ln(\ln x) + x^{a^a} + a^{x^a}$.

   b) $e^y Sen(x) = x + xy$.

3. Demuestre lo siguiente:

   a) Si $f(x) = (\sin(x))^{\cos x}$, entonces
   $$f'(x) = (\sin(x))^{(-1+\cos x)}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln(\sin x))$$

   b) Si $x^3 + y^3 = 1$, entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$

4. La función de posición de una pelota, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de $40m$, es $P(t) = 60t - 32t^2$ (donde P se mide en metros y t en segundos).

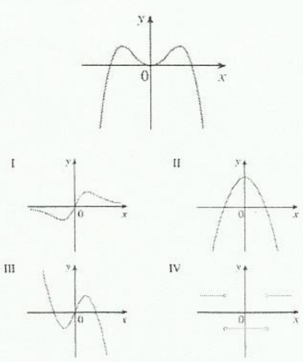
   a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 3s$?

   b) ¿En qué instante la pelota golpea al suelo?.

   c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

5. Dada la gráfica de la función $f(x)$, elija la gráfica de su derivada.

6. Dada la gráfica de la función $f(x)$, elija la gráfica de su derivada.



UNIVERSIDAD DEL NORTE

Parcial III - CALCULO I April 26, 2019 DV

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre completo ______________________________

1. Obtenga (en el caso de existir) los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función dada es paralela al eje x. Obtenga por lo menos una de las ecuaciones de dichas rectas.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 6x$$

2. En cada caso la función o ecuación se supone definida para todo x real. Utilice las propiedades básicas y/o reglas o procedimientos de diferenciación para hallar $y'(x)$:

   a) $e^y Sen(x) = x + xy$.

   b) $y = \ln(\ln x) + x^{a^a} + a^{x^a}$.

3. Demuestre lo siguiente:

   a) Si $f(x) = (\sin(x))^{\cos x}$, entonces
   $$f'(x) = (\sin(x))^{(-1+\cos x)}(\cos^2 x - \sin^2 x \ln(\sin x))$$

   b) Si $x^3 + y^3 = 1$, entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$

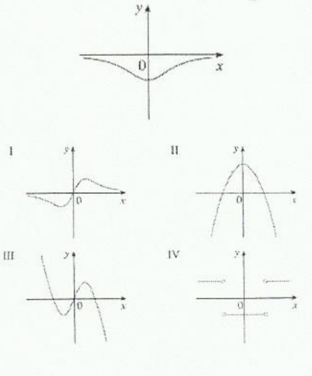
4. La función de posición de una pelota, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de $40m$, es $P(t) = 40t - 32t^2$ (donde P se mide en metros y t en segundos).

   a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 2s$?

   b) ¿En qué instante la pelota golpea al suelo?.

   c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

5. Dada la gráfica de la función $f(x)$, elija la gráfica de su derivada.



Cont.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

DV

Solucionario Parcial III - CALCULO I

Parcial III - Solucionario

26 Abril 2019

1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2+6x$

$f'(x)=x^3-7x+6$

$0=x^3-7x+6$

$0=(x-1)(x^2+x-6)$

$0=(x-1)(x+3)(x-2)$

Puntos donde la tangente es horizontal $x=1$, $x=-3$, $x=2$

Si $x=2$, $f(2)=4-14+12$
$=2$

luego $y=2$ es la ecuación de la recta paralela al eje x.

2) a) $e^y \operatorname{Sen}(x)=x+xy$

$e^y \cdot y' \operatorname{Sen}x+e^y \operatorname{Cos}x=1+y+xy'$

$y'(e^y \operatorname{Sen}x-x)=1+y-e^y \operatorname{Cos}x$

$$\boxed{y'=\frac{1+y-e^y \operatorname{Cos}x}{e^y \operatorname{Sen}x-x}}$$

) $y=\ln(\ln x)+x^{a^a}+a^{x^a}$

$y'=\frac{1}{x\ln x}+a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}(ax^{a-1})\ln(a)$

$$\boxed{y'=\frac{1}{x\ln x}+a^a x^{a^a-1}+a^{x^a+1}\cdot x^{a-1}\cdot\ln(a)}$$

3)

DV

a) $y = (\text{Sen}\,x)^{\cos x}$

$\ln y = \ln(\text{Sen}\,x)^{\cos x}$

$\ln y = \cos x \ln(\text{Sen}\,x)$

$\frac{1}{y} \cdot y' = -\text{Sen}\,x \ln(\text{Sen}\,x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\text{Sen}\,x}$

$y' = y\left(-\text{Sen}\,x \ln(\text{Sen}\,x) + \frac{\cos^2 x}{\text{Sen}\,x}\right)$

$y' = (\text{Sen}\,x)^{\cos x}\left(\frac{-\text{Sen}^2 x \ln(\text{Sen}\,x) + \cos^2 x}{\text{Sen}\,x}\right)$

$y' = (\text{Sen}\,x)^{\cos x - 1}\left(\cos^2 x - \text{Sen}^2 x \ln(\text{Sen}\,x)\right)$

b) $x^3 + y^3 = 1$

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0$

$y' = -\frac{3x^2}{3y^2}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2 + x^2 2y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)}{y^4}$

$= \frac{-2xy^2 + 2x^2y\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)}{y^4}$

$= \frac{-2xy^3 + 2x^2(-x^2)}{y^5} = \frac{-2x(y^3 + x^3)}{y^5} = \frac{-2x(1)}{y^5} = \frac{-2x}{y^5}$

Cont.

DV

4) a) $p'(T) =$ Velocidad instantánea

$v = p'(T) = 40 - 64T$

$V(2) = 40 - 64(2)$

$= 40 - 128$

$\boxed{v = -88\, m/s}$

b) $p(T) = 0$ instante en que golpea al suelo

$40T - 32T^2 = 0$

$8T(5 - 4T) = 0$

$T = 0$, $\boxed{T = \frac{5}{4}}$

c) Velocidad del impacto

$v\left(\frac{5}{4}\right) = 40 - 64\left(\frac{5}{4}\right)$

$= 40 - 80$

$\boxed{v = -40\, m/s}$

5) Solución

I