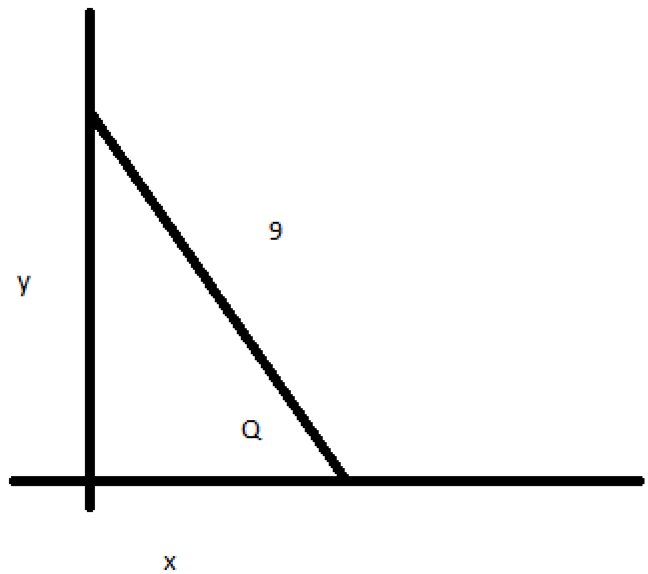
GUIA DE CALIFICACION
EXAMEN FNAL 2018-30
A

1. Una escalera de 9 metros de longitud sobre un piso horizontal esta recostada contra una pared vertical. Su pie resbala a una velocidad constante de 1 m/s alejándose de la pared.
   a. ¿A qué velocidad baja la parte superior de la pared cuan el pie de la escalera dista 3 metros de la pared?
   b. ¿A qué velocidad varía en ese mismo instante el ángulo de la escalera con la horizontal?



$\frac{dx}{dt} = 1\, {}^{m}/_{s}\ \frac{dy}{dt} =?\ \frac{dQ}{dt} =?$

$$x^2 + y^2 = 81 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{y}.\ \ Cuando\ x = 3 \Rightarrow y = 6\sqrt{2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ {}^{m}/_{s}$$

$$\cos(Q) = \frac{x}{9} \Rightarrow -sen(Q)\frac{dQ}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}}{9} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{\frac{dx}{dt}}{9sen(Q)}.Cuando\ x = 3\ sen(Q) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt{2}}\, {}^{rad}/_{s}$$

- Interpreta gráficamente el problema , simboliza las magnitudes que son variables y las que son constantes e identifica las razones de cambio dadas y pedidas…………………………………………………………………….2 puntos
- Hace bien lo anterior , además halla una relación entre las variables y una relación entre las razones de cambio, tanto en el inciso a) como en el inciso b)………………………………………………………………….…4 puntos.
- Hace bien lo anterior, además utiliza bien los datos explícitos e implícitos sin cometer errores numéricos tanto en el inciso a) como en el inciso b)...........…………………………………………………………………….5 puntos.

2. Dada la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ entonces.
   a) Determinar los puntos críticos e intervalos donde la gráfica de la función crece o decrece.
   b) Determinar los puntos de inflexión y los intervalos donde la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo
   c) Trazar la gráfica de la función con base a los resultados obtenidos en a) y b)

$dom(f) = \mathbb{R}.\ \ f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).\ \ f'(x)\ existe\ en\ todo\ punto\ de\ su\ dominio$

$Si\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0\ \ o\ x = 1\ o\ x = -1\ \ \ son\ puntos\ críticos$

Intervalo	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	+	Crece

$(-1, 0)$	-	Decrece
$(0,1)$	-	Decrece
$(1, \infty)$	+	Crece

$En\ x = \ -1\ hay \max relativo,$

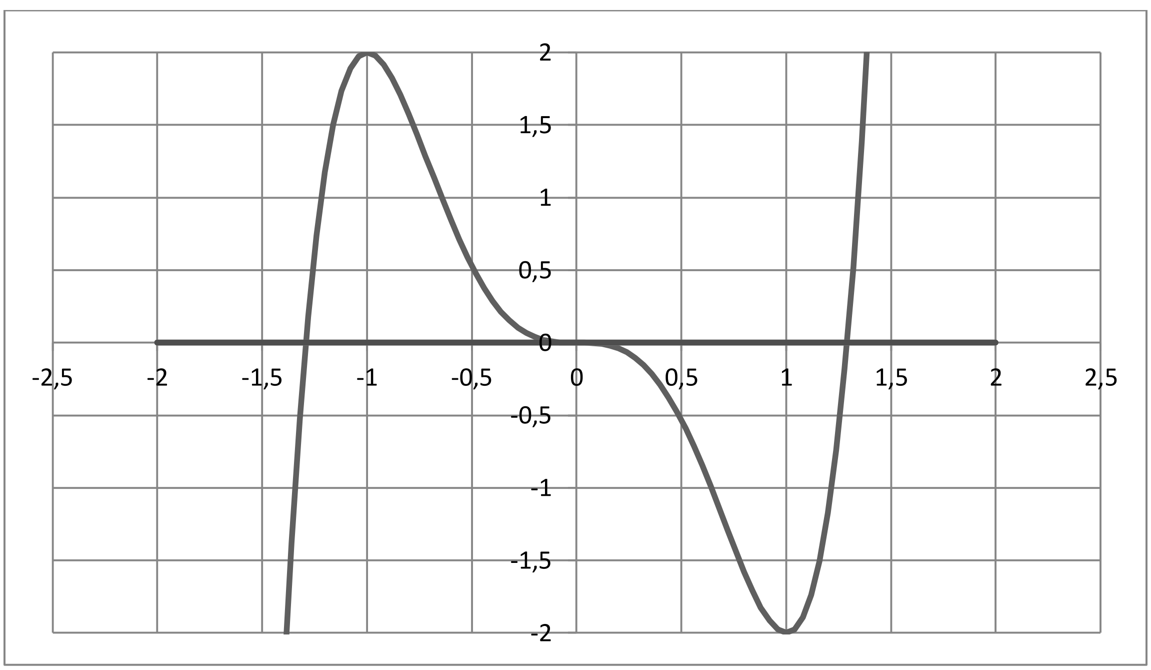
$$f(-1) = 2. En\ x = 0\ no\ hay\ extremo\ relativo. En\ x = 1\ hay \min relativo\ f(-1) = -2$$

$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1). f''(x)\ existe\ en\ todo\ punto\ de\ su\ dominio$

$$Si\ f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0\ \ o\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ o\ x = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ \ sonposibles\ puntos\ de\ inflexión.$$

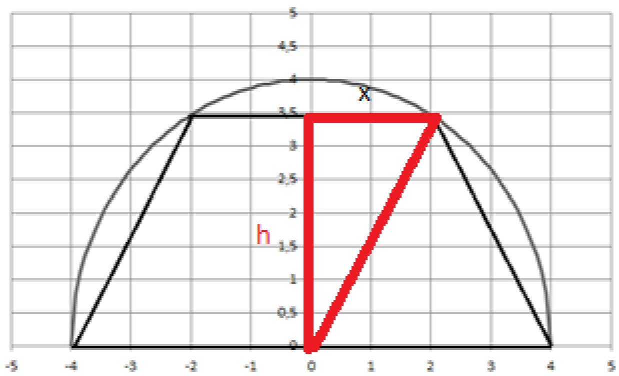
Intervalo	$f''(x)$	$f(x)$
$\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$	-	Cóncava hacia abajo
$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$	+	Cóncava hacia arriba
$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	-	Cóncava hacia abajo
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$	+	Cóncava hacia arriba

$$En\ x = 0, x = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ \ y\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ hay\ puntos\ de\ inflexión.\ \ f(0) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -0.35, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.35$$



- Halla sin errores la primera derivada, encuentra todos los puntos críticos, los intervalos donde la función crece o decrece y los extremos relativos………………………………………………………………… 2 puntos
- Además de lo anterior, halla la segunda derivada , encuentra los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y determina los puntos de inflexión……………………… 4 puntos
- Traza la gráfica de la función de tal manera que contenga las características halladas en los pasos anteriores………. 5 puntos.

3. Hallar el trapecio de mayor área que pueda inscribirse en un semicírculo de radio 18 centímetros teniendo la base inferior en el diámetro del semicírculo.



$A = \frac{(8+2x)h}{2} = (4+x)h.\ \ Pero\ x^2 + h^2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16-x^2} \Rightarrow A(x) = (4+x)\sqrt{16-x^2}$

$A'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 16}{\sqrt{16-x^2}}$

$Si\ A'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 - 4x + 16 = 0 \Rightarrow x = -4\ \ o\ \ x = 2$

Usando el criterio de la primera derivada y que $0 \leq x \leq 4$. También podemos usar el hecho que la función $A(x) = (4+x)\sqrt{16-x^2}$ es continua en $0 \leq x \leq 4$.

$Tenemos$:

Intervalo	$A'(x)$	$A(x)$
$(0,2)$	+	Crece
$(2,4)$	-	Decrece

$En\ x = 2\ A\ es\ máxima.\ \ Las\ dimensiones\ son\ \ Base\ Mayor = 8\ cm\ , Base\ menor = 4\ cm\ \ y\ altura = 2\sqrt{3}$ cm

- Interpreta gráficamente el problema , simboliza las magnitudes que son variables y las que son constantes y construye una función de una variable que calcula el área del trapecio inscrito………2 puntos.
- Hace bien lo anterior **,** además deriva correctamente la función hallada y determina el o los puntos críticos de acuerdo al contexto del problema ………………………………………………………………… 4 puntos
- Además de los dos pasos anteriores, argumenta correctamente porque el valor critico hallado optimiza la función construida en el primer paso y obtiene la solución pedida……………………………… 5 puntos.

4. Usar la regla de L 'Hopital para calcular los límites:

a) $\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}}}{t-1}\right)$

$\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{2}}}{t-1}\right)$ Aplicando L' Hopital se obtiene $\lim_{t\to 1}\left(\frac{\frac{1}{3t^{2/3}} - \frac{1}{2t^{1/2}}}{1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$

- Utiliza correctamente la regla sin cometer errores al derivar o errores algebraicos al simplificar………2 puntos.
- Además de lo anterior no comete errores numéricos al remplazar la variable y realizar los cálculos para obtener la respuesta…………………………………………………………………………………………2.5 puntos

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(4x^2+5)}{\ln(3x^2+1)}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(4x^2+5)}{\ln(3x^2+1)}\right)$. Aplicando L Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8x}{4x^2+5}}{\frac{6x}{3x^2+1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{24x^2+8}{24x^2+30}\right)\ \ .Aplicando\ L\ Hopital\ \lim_{x\to\infty}\frac{48x}{48x} = \lim_{x\to\infty}(1) = !$$

- Utiliza correctamente la regla sin cometer errores al derivar o errores algebraicos al simplificar……..2 puntos.
- Además de lo anterior no comete errores numéricos al remplazar la variable y realizar los cálculos para obtener la respuesta……………………………………………………………………………………………………..2.5 puntos