TALLER DE PREPARACIÓN PARA EL EXAMEN FINAL

2023-30

Puntos críticos, extremos relativos y absolutos

En los siguientes ejercicios encuentre los números críticos.

1. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
2. $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$
3. $f(t) = (t^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$
4. $f(x) = \frac{x-3}{x+7}$
5. $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$
6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+4}$

En los siguientes ejercicios encuentre los extremos absolutos en el intervalo cerrado dado.

7. $f(x) = 4x^2 - 7x + 3\ ,\ \ [-2,3]$
8. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1,\ \ [-1,1]$
9. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 3,\ \ [0,4]$
10. $f(x) = \frac{x^3}{x+2}\ ,[-1,1]$
11. $f(x) = sen(x) - \cos(x)\ ,\ \ [0,\pi]$
12. $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{x}\ ,\ \ [1,4]$

Trace la gráfica de las siguientes funciones, para ello determine: dominio, intersectos con los ejes, intervalos de crecimiento o decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

13. $f(x) = 1 - (x-3)^3$
14. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 3$
15. $f(x) = x^4 - 8x^3$
16. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 18$
17. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1$
18. $f(x) = (x^2 - 4)^3$
19. $f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$
20. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$
21. $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-1)^2}$
22. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
23. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Problemas de máximos y mínimos

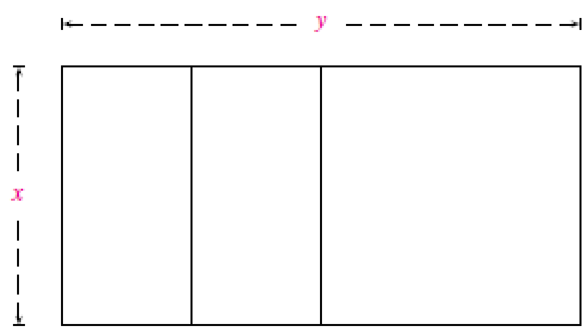
1. Un terreno se encuentra a un lado de una calle y se desea cercar una parte rectangular de 260 metros cuadrados, de modo que la cerca construida mida 1.5 metros de alto. El lado del terreno cercado que colinda con la calle debe ser de ladrillos y los otros tres lados de malla. Si el metro cuadrado construido de ladrillos cuesta $500 y el de malla $200, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que minimizan el costo de su cerca y cuál es el costo mínimo?

$$R/\ Costo\ mínimo = \$25597, ancho = \sqrt{455}, largo = \frac{200}{\sqrt{455}}$$

2. Se desea hacer una caja con tapa cuyo volumen sea de 72 cm3. Además, lo largo de la base debe ser el doble de lo ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de modo que la superficie de la caja sea mínima? y, ¿cuál la superficie mínima?
$R. Largo = 3\ cm, ancho = 6cm, alto = 4\ cm, superficie\ mínima\ \ de\ la\ caja\ 108\ cm^2$

3. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrad de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales en cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.
R. 128 cm^3

4. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?



R. 18 m^2

5. Se desea hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?

$$Respuesta.\ altura = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

6. Un barco encalló a 9 km del punto P más próximo de una costa con forma de línea recta. Se necesita enviar un mensajero a un pueblo situado en la orilla de la costa a 15 km de P. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km por hora, y en una barca a 4 km por hora, decir en qué punto de la orilla debe desembarcar para llegar al pueblo lo más pronto posible.

$$Respuesta.\ 3\ km\ antes\ de\ llegar\ al\ pueblo$$

7. Sea P el punto, en una playa recta, más cercano a una isla que está a 60 km. Para llegar de la isla al poblado más próximo que está a 200 km de P se usa un pequeño barco y un autobús. La velocidad del barco es de 40 km por hora y la del autobús 90 km por hora. El costo por hora del uso del barco es de \$2, 000 y el costo del uso del autobús es de \$1, 500 por hora. ¿En qué punto debe construirse la central de autobuses para que los costos sean mínimos?

$$Respuesta: 178{,}78\ km\ del\ poblado$$

8. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio *r*

R. $x_{max} = \frac{2}{\sqrt{2}}r,\ \ y_{max} = \frac{2}{\sqrt{2}}r$

9. Encontrar el trapecio de máxima área inscrito en un semicírculo de radio 10 cm.

$$Respuesta:\ altura\ del\ trapecio = 5\sqrt{3}cm$$

10. Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio 25 cm

$$Respuesta:.\ altura = \frac{50}{\sqrt{3}}cm$$

11. Inscribir un triángulo isósceles de área máxima en una circunferencia de radio 15 cm.

$$Respuesta\ .Triangulo\ equilatero\ de\ \ 15\sqrt{3}cm$$

12. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pude inscribirse en cono circular recto de radio R y altura H

$$Respuesta.\ \ r = \frac{2R}{3}\ ,h = \frac{H}{3}$$

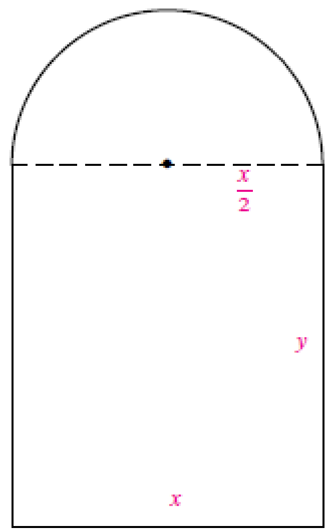
13. Hallar las dimensiones del cono circular recto que puede inscribirse en una esfera de radio R

$$Respuesta.\quad h = \frac{4}{3}R,\qquad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

14. Calcule el área del mayor rectángulo que pueda inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

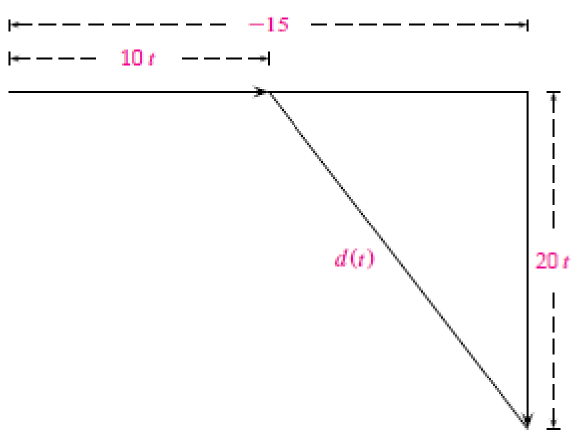
$$Respuesta.\ 12\ unidades\ cuadradas$$

15. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de *P* m , encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la mayor cantidad de luz posible



R. $x_{max} = \frac{2P}{4+\pi}$, $y_{max} = \frac{1}{2} x_{max}$

16. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y a una velocidad de 20 Km/h. El otro, hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 Km al oeste, a 10 Km/h. ¿ En qué momento se encuentran más próximos éstos navíos?



R 3/10 h

17. A las 13 horas un barco A se encuentra a 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿ A qué horas se lacanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?
R. 13 +12/13 horas

18. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 10 dm^3 en forma de cilindro circular recto rematado con dos hemisferios (medias esferas). Tomando

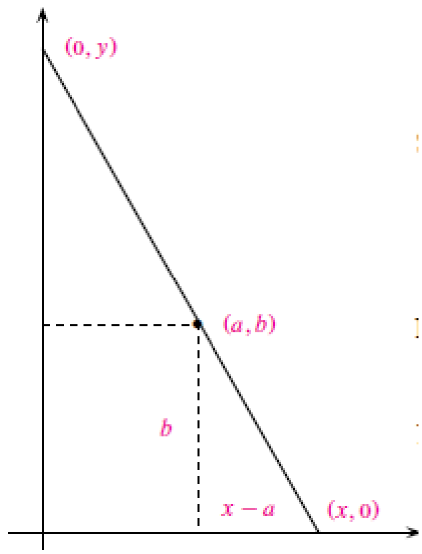
en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

R. El tanque debe ser una esfera de 1.3365 dm de radio

19. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad de material posible para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

R. $r_{min} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$, $h_{min} = 2r_{min}$

20. Un triángulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a,b). Hallar sus vértices de modo que su área sea mínima.



R. $x_{min} = 2a, y_{min} = 2b$

21. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine $a\ y\ b$ de modo que f tenga un punto de inflexión en el punto $(1{,}2)$

22. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ determine $a, b\ y\ c$ de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1, -1)$ y que la pendiente de la tangente de inflexión en ese punto sea -3

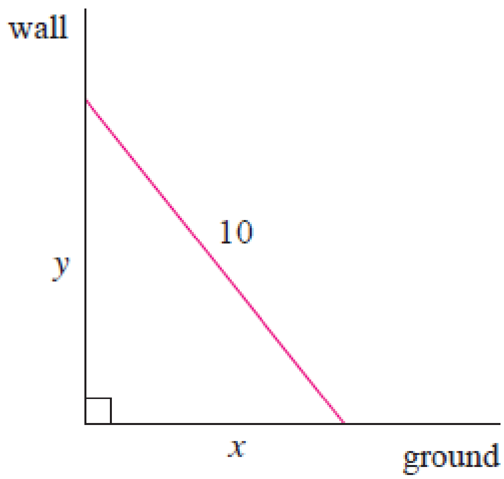
Problemas de razones de cambio relacionadas

1. Se infla un globo esférico y su volumen se incrementa a razón de $100\ {cm^3}/{seg}$. ¿Qué tan rápido aumente el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

2. Suponga que un incendio forestal se propaga en forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿ A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

R/ 679 m^2/min

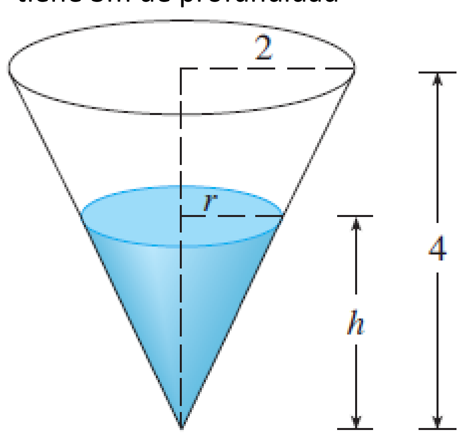
3. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de $1\, {}^{pie}/_{seg}$, ¿qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera, cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro



4. Sea *l* la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes *x* & *y* respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de ½ m/s y si *y* disminuye con una rapidez de ¼ m/s, ¿ a qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando x= 3 m & y=4 m?, ¿ la diagonal está disminuyendo o está aumentando en ese instante?

R. 1/10 m/s. La longitud de la diagonal en ese momento crece

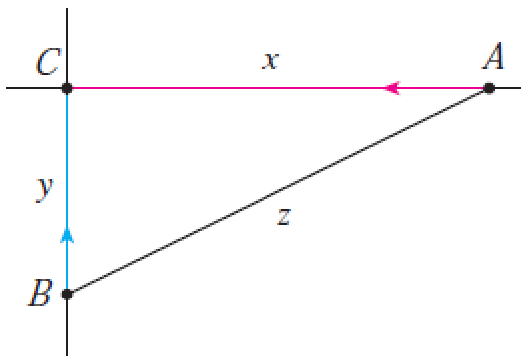
5. Un tanque de agua tiene la forma de cono circular invertido, el radio de la base es 2m y la altura de 4m. Si el agua se empieza a bombear al tanque a razón de $2\, {}^{m^3}/_{min}$, encuentre la razón con la que el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3m de profundidad



6. Un anuncio publicitario tiene la forma de un cilindro circular recto, determinar la variación de su volumen en su proceso de inflado sabiendo que la altura permanece constante

R. $\frac{dV}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt}$

7. El automóvil A viaja hacia el Oeste a una velocidad de $50\ {}^{km}/_{hora}$ y el automóvil B viaja hacia el Norte a $60\ {}^{km}/_{hora}$. Ambos se dirigen hacia la intersección de dos caminos. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a $0.3\ kms$ y el automóvil B está a $0.4\ kms$ de la intersección?



8. Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 Km/h y el otro viaja hacia el oeste a 25 Km/h. ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 h más tarde?

R. 65 Km/h

9. Si V es el volumen de un cubo cuyo lado mide x, además, el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, calcule $\frac{dV}{dt}$ en términos de $\frac{dx}{dt}$

10. Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El que parte primero se dirige hacia el norte con una velocidad de 100 Km/h. El otro tren se dirige hacia el este con una velocidad de 60 Km/h. ¿A qué velocidad está cambiando la distancia entre los dos trenes 2 h después de que partió el segundo tren?

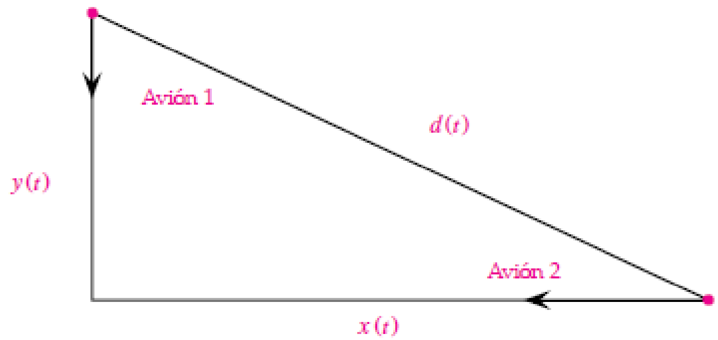
R. 111.24 Km/h

11. Si A es el área de un círculo cuyo radio es r y el círculo se amplía a medida que pasa el tiempo, determine $\frac{dA}{dt}$ en términos de $\frac{dr}{dt}$

12. Un controlador aéreo sitúa dos aviones a la misma altitud. Convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro. Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas/h. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas/h.

   a. ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?

b. ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?



R. a) -750 millas/h b) Los aviones chocarán en 20 minutos sino se cambia la trayectoria

13. Un globo de aire caliente que asciende en línea recta desde el nivel del suelo es rastreado por un observador que está a $500\,pies$ del punto de elevación. En el momento que el ángulo de elevación del observador es $\pi/_4$, el ángulo crece a razón de $0.14\ \frac{rad}{min}$. ¿Qué tan rápido se está elevando el globo en ese momento?

14. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de $1\ milla$ y a una rapidez de $500\ ^{millas}/_{hora}$ pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con que la distancia desde el avión a la estación se incrementa, cuando este está a $2\ millas$ de la estación.

R. 433 millas/h

15. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de $15\,pies$ de altura. Un hombre de $6\,pies$ de altura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 $^{pies}/_{seg}$ a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Con qué rapidez se alarga su sombra?

R. 10/3 pies/s

16. Una lámpara sobre el piso ilumina una pared a $12\ m$ de distancia. Si un hombre de $2\ m$ de estatura camina desde la lámpara hacia el edificio a una rapidez de $1.6\ m/seg$, ¿qu´e tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre el muro cuando está a $4\ m$ del edificio?

17. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo . Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

R. 13.856 cm^2/h

18. La altura de un triángulo se incrementa a razón de $1\ cm/min$ mientras que el área del triángulo aumenta a razón de $2\ cm^2/min$. ¿A qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de $10\ cm$ y el área es de $100\ cm^2$?

19. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a una razón de $10.000\ cm^3/min$ al mismo tiempo que se bombea agua al tanque a una razón constante. El depósito mide $6\ m$ de alto y el diámetro en la parte superior es de $4\ m$. Si el nivel de agua se eleva a una razón de $20\ cm/min$ cuando la altura del agua es $2\ m$, encuentre la razón a la que el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

20. Cuando un tanque esférico de radio *a* contiene un líquido con una profundidad *h* , el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando a una razón de 20 lt/s. Calcule la razón de cambio del nivel del agua cuando *h*=1.25 m (1 lt= 1 dm^3)

R. 0.00194 dm/s

21. Un canal de agua mide $10\ m$ de largo y su sección transversal tiene la forma de una trapezoide isósceles que tiene $30\ cm$ de ancho en la parte inferior, $80\ cm$ de ancho en la parte superior y tiene una altura de $50\ cm$. Si el canal se está llenando con agua a razón de $0.2\ m^3/min$, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ´esta se encuentra a $30\ cm$ de profundidad?

22. Dos de los lados de un triángulo miden $4\ y\ 5\ m$ respectivamente, y el ángulo entre ellos crece a razón de $0.06\ rad/seg$. Calcule la proporción a la que el área del rectángulo se incrementa cuando en ángulo entre los dos lados de longitud constante es de $\pi/3$.

23. La ley adiabática (sin perdida ni ganancia de calor) para la expansión de una gas es

$$PV^{1/4} = C$$

(Donde P es la presión, V es el volumen y C es una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 pie^3, la presión es de 40 lb/pie^2 y ésta está creciendo a razón de 8 lb/pie^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante

R. $-{}^{1}/_{7}\ pie^3/s$

24. La $ley\ de\ Boyle$ establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V cumplen la ecuación $P\,V = C$, donde C es una constante. Suponga que en cierto instante el volumen es de $600\ cm^3$, la presión es de $150\ kPa$ y que la presión se incrementa una cantidad de $20\ kPa/min$. ¿En qué proporción disminuye el

volumen en este instante?

Aproximaciones lineales y diferenciales.

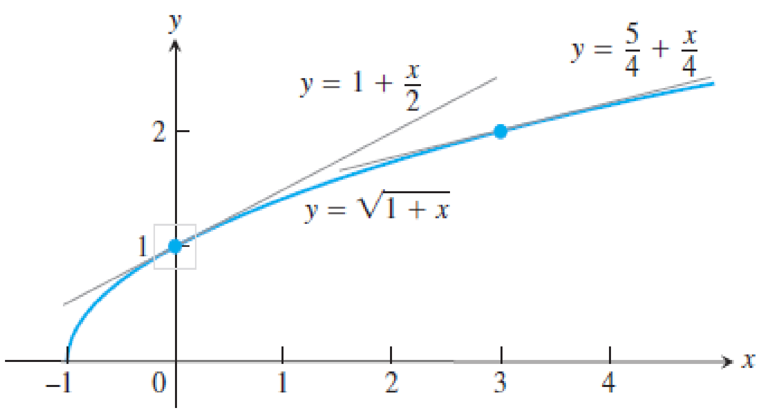
Dado que, gráficamente, una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente alrededor de su punto de tangencia, la idea en esta segunda parte es usar la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ como una aproximación para los valores de $f(x)$ cuando x es un número cercano a a. Así, si f es diferenciable en a, la función de aproximación $(que\ es\ simplemente\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ curva\ y = f(x)\ en\ el\ punto\ (a, f(a)))$

$$L(x) = f(a) + fj(a)(x - a)$$

Se denomina $la\ Linealización\ de\ f\ \ en\ a$, y la aproximación

$$f(x) \approx L(x)\ de\ f\ \ por\ L\ es\ la\ aproximacion\ lineal\ de\ f\ \ en\ a.$$

Ejemplo. Encontrar la Linealización de $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{1+\mathrm{x}}$ en $\mathrm{x} = 0$.



$Como\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\ tenemos\ f'(0) = \frac{1}{2} \quad y \quad f(0) = 1$

$De\ modo\ que\ la\ linealización\ L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-0) = 1 + \dfrac{x}{2}$

Notemos que la aproximación $\sqrt{x+1} \cong 1 + \frac{x}{2}$ es bastante precisa para valores de $x\ cercanos\ a\ 0.$

La utilidad de la Linealización radica en la posibilidad de reemplazar una fórmula complicada por una más sencilla en todo un intervalo de valores.

Las ideas tras las aproximaciones lineales son en ocasiones formuladas en términos de diferenciales. Si $y = f(x)$, donde f es una función diferenciable, entonces la diferencial dx es una variable independiente que puede tomar cualquier valor. La diferencial dy es definida en términos de dx mediante la siguiente ecuación:

$$dy = f'(x)dx$$

Así, dy es una variable dependiente; esta depende tanto de x como de dx.

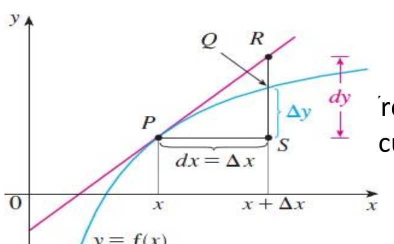
Para dar un significado geométrico a las diferenciales, considere la gráfica. Sean $P = (x, f(x))$ y $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ dos puntos sobre la gráfica de f y tome $dx = \Delta x$.

El correspondiente cambio en y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

La pendiente de la recta tangente a la curva en P es $f'(x)$ que la distancia entre los puntos R y S en la gráfica es $f'(x)dx = dy$. Por consiguiente, dy representa el incremento (o cambio) en la Linealización cuando x cambia en una cantidad dx, mientras que Δy es el incremento (o cambio) en f cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

En consecuencia, para valores pequeños de Δx, se tiene la aproximación $dy \approx \Delta y$, con lo que

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy.$$



rculo crece de r = 10 m a 10.1 m. Use dA para estimar el culo. Estimar el área del círculo agrandado y comparar la

Solución. Como $A = \pi r^2$, el incremento estimado es

$$dA = A'(r)dr = 2\pi(10m)(0{,}1m) = 2\pi\, m^2.$$

Por lo tanto, $A(10 + 0{,}1) \approx A(10) + 2\pi = \pi(10)2 + 2\pi = 102\pi$. Así, el área del círculo de radio 10.1 es aproximadamente $102\pi\, m^2$.

El área real es

$$A(10{,}1) = \pi(10{,}1)2 = 102{,}01\pi\ m^2.$$

El error en esta estimación es de $1.01\pi\, m^2$, que es la diferencia $\Delta A - dA$.

Cuando nos movemos de un punto a a un punto cercano $a + dx$, podemos escribir el cambio en f de tres maneras:

	Real	Estimado
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

Ejercicios.

1. Encuentre la linealización de la función en el punto a.

   (a) $f(x) = sen(x),\ a = {}^{\pi}/_{6}$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}\,, a = 0$

2. Verifique la aproximación lineal dada en $a = 0$.

   (a) $\ln(1+x) \approx x$

   (b) $e^x \cos(x) \approx 1 + x$

   (c) $\tan(x) \approx x$

3. Resuelva los siguientes ejercicios.

   (a) Demuestre que la linealización de $f\ (x) = (1 + x)^k, con\ k \in R, en\ x = 0\ es\ L(x) = 1 + kx.$

   (b) Use la aproximación $(1+x)^k \approx 1 + kx$ para encontrar una aproximación de la función $f(x)$ para valores de x cercanos a 0

   i. $f(x) = (1-x)^6$

   ii. $f(x) = \frac{2}{1-x}$

   iii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

4. Encuentre el diferencial dy para cada una de las siguientes funciones.

   (a) $y = x^2 sen(x)$

   (b) $y = \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right)$

   (c) $y = \frac{1-v^2}{1+v^2}$

   (d) $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$

(e) $y = 3csc\left(1 - 2\sqrt{x}\right)$

5. En los siguientes ejercicios, cada función f cambia su valor cuando $x\ cambia\ de\ x_0\ \ a\ x_0\ +\ dx$. Encuentre
   (a) El cambio $\Delta y = f(x_0\ + dx) - f(x_0)$
   (b) El valor de la estimación $dy = f'(x_0)dx$
   (c) El error de aproximación $|\Delta y - dy|$
      i. $f(x) =\ 2x^2\ +\ 4x -\ 3;\ x_0\ =\ -1;\ dx\ =\ 0.1$
      ii. $f(x) =\ x^4;\ x_0\ =\ 1;\ dx\ =\ -0.1$
      iii. $f(x) = \cos(\pi x)\,;\ x_0\ =\ \frac{1}{3};\ dx\ =\ -0.02$
6. Use una aproximación lineal (o diferenciales) para estimar el número dado.
   (a) $(1.9999)^4$
   (b) $e^{-0.015}$
   (c) $\sqrt{99.8}$
   (d) $sec(0;08)$
7. La arista de un cubo fue medida y se encontró que su longitud era $30\ cm$ con un posible error en la medida de $0.1\ cm$. Use diferenciales para estimar la error máximo posible, el error relativo y el error porcentual en el cálculo de (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.
8. La circunferencia de una esfera fue medida como 84 cm pero con un posible error de 0.5 cm.
   (a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área de su superficie. ¿Cuál es el error relativo?
   (b) Use diferenciales para estimar el máximo error en el cálculo del volumen. ¿Cuál es el error relativo?
9. Use diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de $0.05\ cm$ de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de $50\ m$.

Fundamentos

En los problemas 1-40, use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

2. $\lim_{t\to 3} \dfrac{t^3 - 27}{t - 3}$

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x - 2}{\ln x}$

4. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln 2x}{\ln 3x}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{3x + x^2}$

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{2x}$

7. $\lim_{t\to \pi} \dfrac{5\,\text{sen}^2\, t}{1 + \cos t}$

8. $\lim_{\theta\to 1} \dfrac{\theta^2 - 1}{e^{\theta^2} - e}$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{6 + 6x + 3x^2 - 6e^x}{x - \text{sen}\, x}$

10. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^2 - 4x^3}{5x + 7x^3}$

11. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cot 2x}{\cot x}$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}(x/6)}{\arctan(x/2)}$

13. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t^3 - 2t^2 + t - 2}$

14. $\lim_{r\to -1} \dfrac{r^3 - r^2 - 5r - 3}{(r + 1)^2}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \text{sen}\, x}{x^3}$

16. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x}{x^2}$

18. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2e^{4x} + x}{e^{4x} + 3x}$

19. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln \sqrt{x}}{x - 1}$

20. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 1)}$

21. $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^{x^2} - e^{2x}}{x - 2}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4^x - 3^x}{x}$

23. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x \ln x}{x^2 + 1}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cosh t}{t^2}$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x - \csc x)$

43. $\lim\limits_{x\to \infty} x(e^{1/x} - 1)$

44. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

46. $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{1/(1-x)}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cos 3x}{x^2}\right]$

49. $\lim\limits_{t\to 3}\left[\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2 - 9} - \dfrac{2}{t^2 - 9}\right]$

50. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}\right]$

51. $\lim\limits_{\theta\to 0} \theta \csc 4\theta$

52. $\lim\limits_{x\to \pi/2^-} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan x}$

53. $\lim\limits_{x\to \infty}(2 + e^x)^{e^{-x}}$

54. $\lim\limits_{x\to 0^-}(1 - e^x)^{x^2}$

55. $\lim\limits_{t\to \infty}\left(1 + \dfrac{3}{t}\right)^t$

56. $\lim\limits_{h\to 0}(1 + 2h)^{4/h}$

57. $\lim\limits_{x\to 0} x^{(1-\cos x)}$

58. $\lim\limits_{\theta\to 0}(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$

59. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^2 \operatorname{sen}^2(2/x)}$

60. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 1)^{x^2}$

61. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{5}{x^2 + 3x - 4}\right]$

62. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right]$

63. $\lim\limits_{x\to \infty} x^5 e^{-x}$

64. $\lim\limits_{x\to \infty}(x + e^x)^{2/x}$

65. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

66. $\lim\limits_{t\to \pi/4}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan 2t$

67. $\lim\limits_{x\to \infty} x \tan\left(\dfrac{5}{x}\right)$

68. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x)$

69. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{1}{e^x} - x^2\right]$

70. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 5 \operatorname{sen} x)^{\cot x}$

71. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x}{3x + 1}\right)^x$

72. $\lim\limits_{\theta\to \pi/2^-}(\sec^3 \theta - \tan^3 \theta)$

73. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{senh} x)^{\tan x}$

74. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(\ln x)^2}$

Problemas 5.9

1. 0

3. 2

5. $\frac{2}{3}$

7. 10

9. -6

11. $\frac{1}{2}$

13. $\frac{7}{5}$

15. $\frac{1}{6}$

17. no existe

19. $\frac{1}{2}$

21. $2e^4$

23. 0

25. $\frac{1}{3}$

27. ∞

29. -2

31. $-\frac{1}{8}$

33. -1

35. no existe

37. $\frac{1}{9}$

39. 3

41. $\infty - \infty; \quad -\frac{1}{2}$

43. $0 \cdot \infty; \quad 1$

45. $0^0; \quad 1$

47. $\infty - \infty; \quad 0$

49. $\infty - \infty; \quad \frac{1}{24}$

51. $0 \cdot \infty; \quad \frac{1}{4}$

53. $\infty^0; \quad 1$

55. $1^\infty; \quad e^3$

57. $0^0; \quad 1$

59. El denominador es $0 \cdot \infty; \quad \frac{1}{4}$

61. $\infty - \infty; \quad \frac{1}{5}$

63. $0 \cdot \infty; \quad 0$

65. $0 \cdot \infty; \quad 1$

67. $0 \cdot \infty; \quad 5$

69. $\infty - \infty;$ no existe

71. $1^\infty; \quad e^{-1/3}$

73. $0^0; \quad 1$

75. $\frac{1}{2}$

79. 0

81. *a)* $A(\theta) = 25\,\dfrac{\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta}{\theta^2}$ *b)* 0 *c)* $\frac{50}{3}$

83. *b)* $p_1 v_1 \ln(v_2/v_1)$