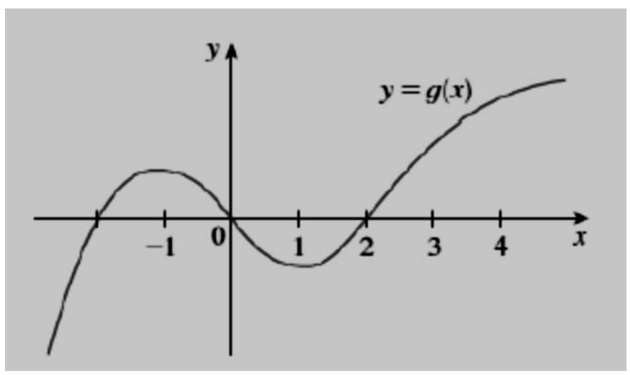
TALLER DE PREPARACION PARA EL TERCER PARCIAL 2023-10

$\boldsymbol{Nota: en\ los\ ejercicós\ que\ siguen\ puede\ usar\ las\ reglas\ de\ derivación.}$

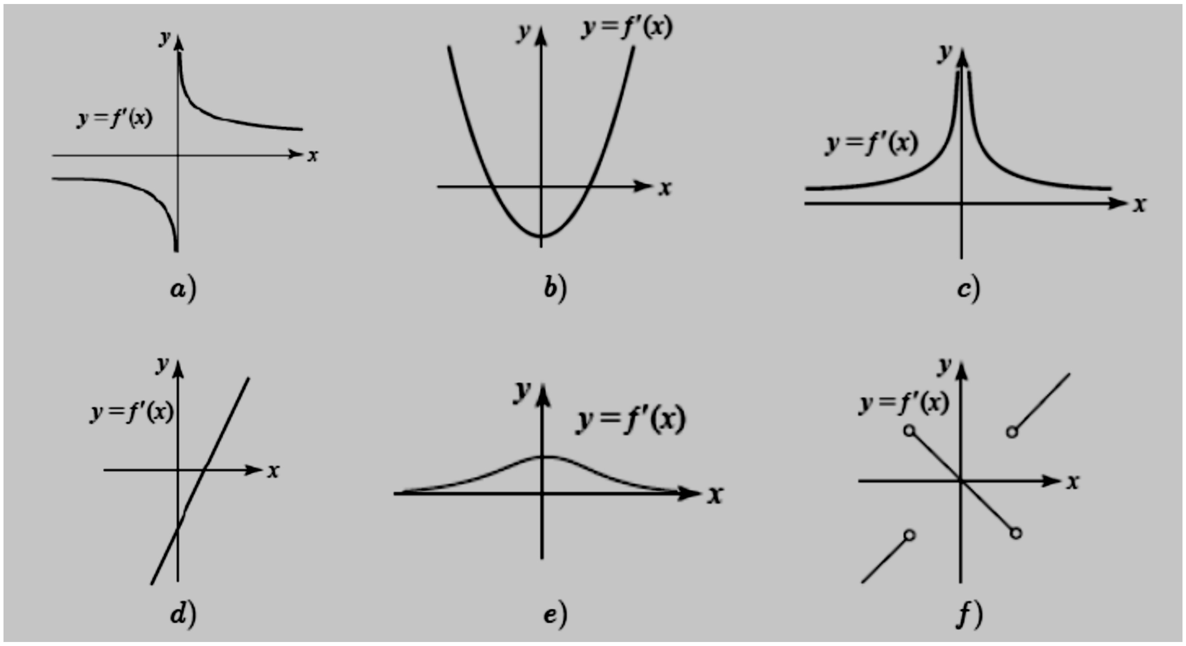
1. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado
   a. $f(x) = 4 - \frac{8}{x} \quad P = (1, -4)$
   b. $f(x) = sen(x),\ P = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
   c. $f(x) = -2x^3 + x,\ P = (-1,1)$
   d. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ P = \left(4, \frac{1}{2}\right)$
   e. $y = \frac{1}{2+x}\ ,\ P = \left(2, \frac{1}{4}\right)$
2. Si una pelota es lanzada, desde el suelo, al aire con una velocidad de $40\ {}^{m}/_{s}$, su altura (en metros) respecto al suelo es $y = 40t - 16t^2$, use la noción de razón de cambio instantáneo para hallar la velocidad de la pelota en el instante $t = 2\ s$ (Use las reglas de derivación)
3. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación $s = \frac{1}{t^2}$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = 1, t = 2\ y\ t = 3$
4. Para la función g cuya grafica se muestra a continuación. ordene los siguiente números de menor a mayor y explique su razonamiento

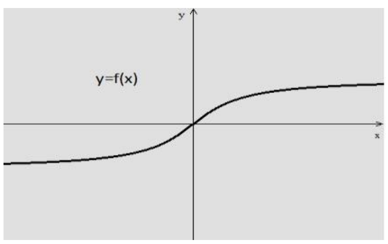
$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$

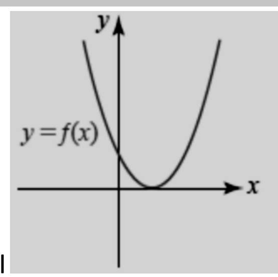


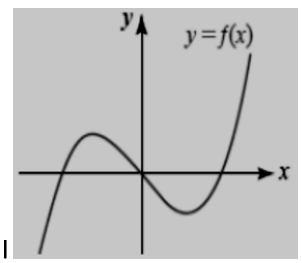
5. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $a = 2$ es $y = 4x - 5$ encuentre $f(2) \quad y \ f'(2)$
6. Haga el bosquejo de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0\ , g'(1) = g'(3) = 0, g'(0) = g'(4) = 1, g'(2) = -1, \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty\ y\ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

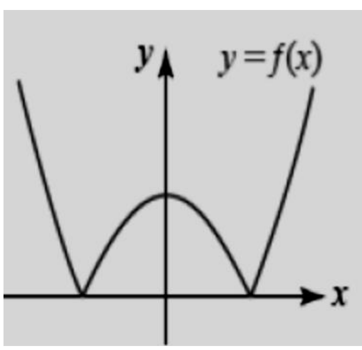
7. En los ejercicios del I al VI relacione la gráfica de f con una gráfica de f' de $a) - f)$

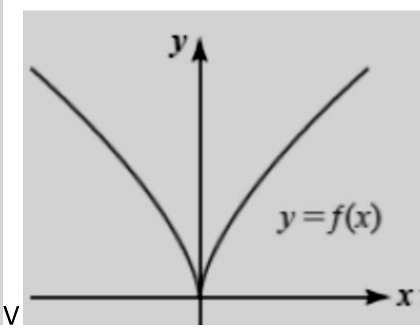


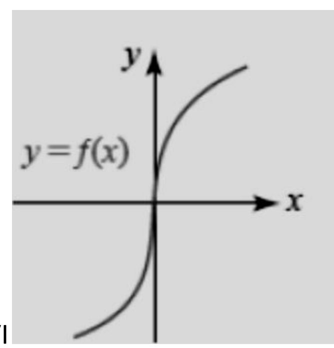
I. 

II 

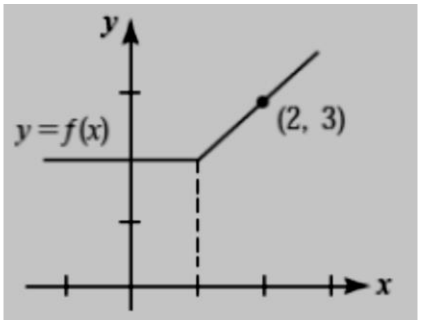
III 

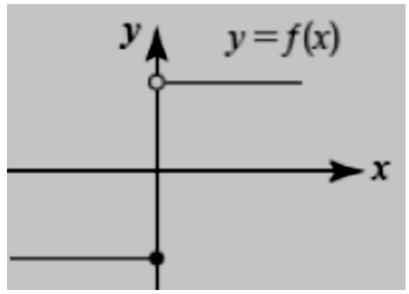
IV 

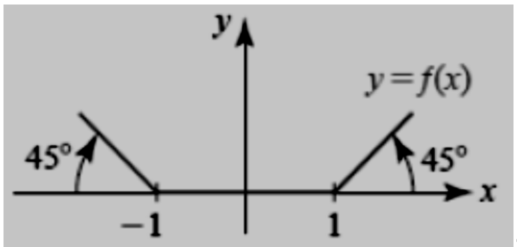
V 

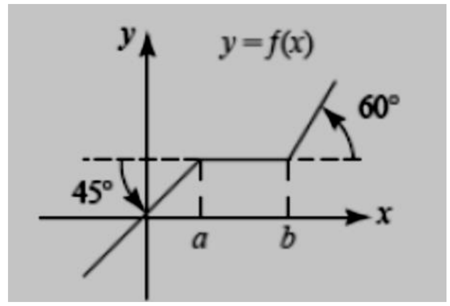
VI 

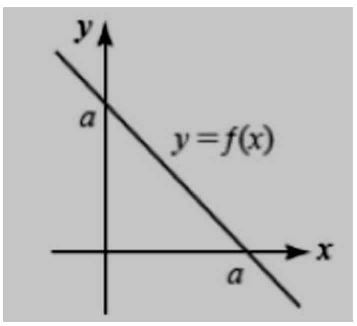
8. Bosqueje la gráfica de f' a partir de la gráfica de f

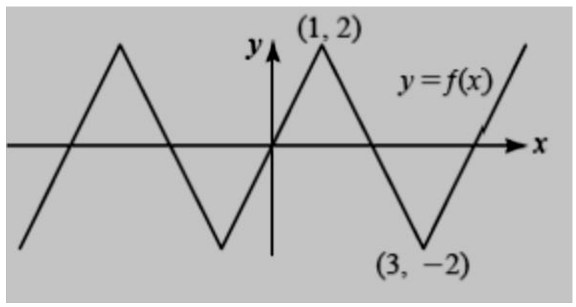
a. 

b. 

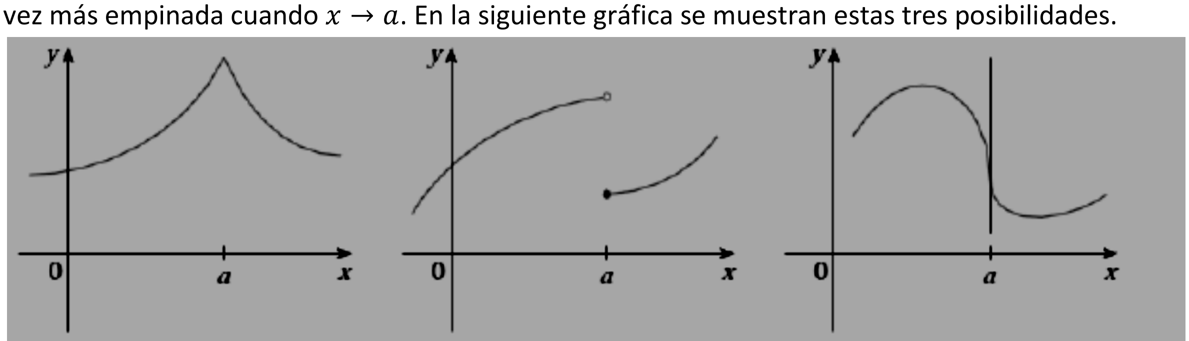
c. 

d. 

e. 

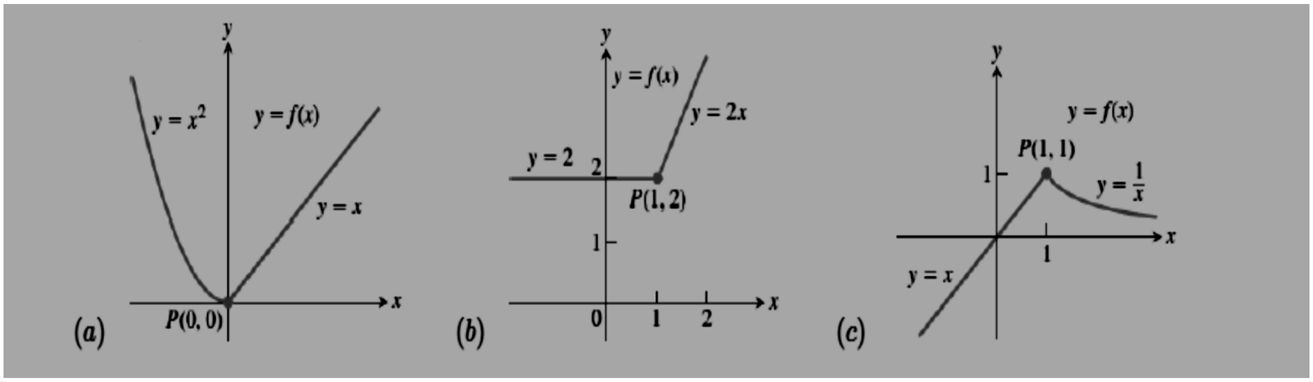
f. 

Nota: ¿Cómo puede una función dejar de ser diferenciable? Vimos que la función $y = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$; una revisión cuidadosa de su grafica muestra que ésta cambia abruptamente de dirección cuando $x = 0$. En general si la gráfica de una ecuación tiene una "esquina" o un "pico", entonces f no tiene tangente en este punto y f no es diferenciable allí. (al intentar calcular $f'_+ \; y \; f'_-$ encontramos que son diferentes). Mostramos además que si una función f es diferenciable en a, entonces f es continua en a; en consecuencia, si f no es continua en a entonces f no puede ser derivable en a. Así, f no es derivable en cualquier discontinuidad. Una tercera posibilidad es que la curva tenga un línea tangente vertical en $x = a, f$ es continua en a y $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$. Esto quiere decir que la línea tangente se vuelve cada vez más empinada cuando $x \to a$. En la siguiente gráfica se muestran estas tres posibilidades.



(a) A corner (b) A discontinuity (c) A vertical tangent

9. Compare las derivadas por la derecha y por la izquierda de las funciones dadas en las siguientes gráficas, para mostrar que no son diferenciables en el punto P. Puede utilizar cualquier definición para $f'_{+}(a)\ y\ f'_{-}(a)$ que involucren el límite



10. Muestre que la función $f(x) = |x - 3|$ no es derivable en 3. Encuentre una fórmula para f' y dibuje su gráfica.
11. Si $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ muestre que $g'(0)$ no existe. Dibuje la gráfica de g e ilustre la recta tangente vertical en $x = 0$
12. ¿ Es $f(x) = x + \sqrt{x}$ derivable en $x = 0$?. ¿Cómo se comporta la gráfica de $f\ en\ x = 0$?
13. ¿Dónde no es derivable la función $f(x) = [\![x]\!]$? Halle una fórmula para f' y dibuje su gráfica
14. Dada f se definió su derivada por la izquierda en a y su derivada por la derecha en a como sigue

$$f'_{-}(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad o\ f'_{-}(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad o\ f'_{+}(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si estos límites existen. Por lo tanto, $f'(a)$ existe, si y solo si, éstas derivadas laterales existen y son iguales

a. Encuentre $f'_{-}(0), f'_{+}(0), f'_{-}(4)\ y\ f'_{+}(4)$ para la función $f(x) = \begin{cases} 0\ si\ x \le 0 \\ 5 - x\ si\ 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x}\ si\ x \ge 4 \end{cases}$

b. Bosqueje la gráfica de f
c. ¿Dónde f es discontinua?
d. ¿Dónde no es derivable f?

15. Calcular las derivadas usando reglas de derivación y simplifique donde sea posible

a. $g(x) = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$ R. $5x^4 - 9x^2 + 4x - 28$

b. b. $F(y) = \frac{3y+1}{2y-5}$ R. $-\frac{17}{(2y-5)^2}$

c. c. $y = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ R. $\frac{1}{3}\,\frac{5x+2}{x^{1/3}}$

d. d. $y = \frac{10}{x^2+1}$ R. $-\frac{20x}{(x^2+1)^2}$

e. $y = \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$ R. $-\frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{x}+3}{x^{5/2}}$

f. $j(x) = (x + x^{-1})^3$ R. $\frac{3(x^2+1)^2(x^2-1)}{x^4}$

g. $u = tsen(t)$ R. $\sin(t) + t\cos(t)$

h. $g(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ R. $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

i. $f(x) = \frac{x^2-2}{2x+1}$ R. $\frac{2\left(x^2+x+2\right)}{(2x+1)^2}$

m. $y = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ R. $\frac{1}{2}\,\frac{3x^2+4x-3}{x^{3/2}}$

p. $f(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$ R. $-4\cos(x)\sin(x)$

q. q. $y = (cosc(x))^{-1}$ R. $\cos(x)$

r. r. $y = 4cos^2(\sqrt{x})$ R. $-\frac{4\cos(\sqrt{x})\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

t. $y = sen(\sqrt{2x})$ R. $\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\sqrt{2}\sqrt{x})\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

u. $y = tan\left(\frac{1}{x}\right)$ R. $-\frac{sec^2(1/x)}{x^2}$

v. $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ R. $\frac{2x}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\left(x^2+1\right)^2}$

w. $y = 10^{-3x^2}$ R. $10^{-3x^2} * \ln 10 * (-6x)$

x. $f(x) = e^{e^{x^2}}$ R. $2x\,e^{x^2+e^{x^2}}$

y. $y = e^{2x}e^{3x}e^{4x}$ R. $9\,e^{9x}$

z. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ R. $\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

16. Calcular las derivadas usando reglas de derivación y simplifique donde sea posible

a. $f(x) = ln(x^4+3x^2+1)$ R. $\frac{2x\left(2x^2+3\right)}{x^4+3x^2+1}$

b. $F(y) = ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right)$ R. $\frac{1}{2y}$

c. $y = (\ln(x))^{\frac{1}{2}}$ R. $\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}\,x}$

d. $y = \frac{\ln(x)}{x}$ R. $-\frac{-1+\ln(x)}{x^2}$

e. $j(x) = ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ R. $\frac{1}{x(x+1)}$

f. $u = ln\left(\sqrt{5x+1}(x^3+6)^6\right)$ R. $\frac{1}{2}\,\frac{185x^3+36x^2+30}{\left(x^3+6\right)(5x+1)}$

g. $y = ln\left(\sqrt{\frac{(3x+2)^5}{x^4+7}}\right)$ R. $\frac{1}{2}\,\frac{3x^4-8x^3+105}{(3x+2)\left(x^4+7\right)}$

h. $g(x) = \sqrt{ln(\sqrt{x})}$ R. $\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln(x)}\,x}$

i. $f(x) = \sec(x)\tan(x)$ R. $\sec(x)(2sec^2(x) - 1)$

j. $f(\theta) = \frac{1}{1+\cos(\theta)}$ R. $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2 + 2\cos(\theta) + 1}$

k. $y = \frac{1}{(1+\sec(x))^2}$ R. $-\frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^3 + 3\cos(x)^2 + 3\cos(x) + 1}$

l. $g(x) = e^{xsen(2x)}$ R. $(\sin(2x) + 2x\cos(2x))\, e^{x\sin(2x)}$

m. $F(y) = sen(e^y) + e^{sen(y)}$ R. $e^{\sin(y)}\left(\cos(e^y)\, e^y + \sin(e^y)\cos(y)\right)$

n. $u = 10^{1-t^2}$ R. $-2tln(10)10^{1-t^2}$

o. $y = sec^2(3\theta)$ R. $\frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)^3}$

p. $f(x) = \frac{1}{6}(1 + cos^2(7x))^2$ R. $-\frac{14}{3}\left(1 + \cos(7x)^2\right)\cos(7x)\sin(7x)$

q. $y = 2^{3^{x^2}}$ R. $2^{1+3^{x^2}}\, 3^{x^2}\, x\ln(3)\ln(2)$

r. $y = 4sen\left(\sqrt{1+\sqrt{t}}\right)$ R. $\frac{\cos\left(\sqrt{1+\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{t}}\,\sqrt{t}}$

s. $f(x) = arcsen(5x - 1)$ R. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-x(5x-2)}}$

t. $y = arccos\left(\frac{x+1}{3}\right)$ R. $-\frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$

u. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ R. $\frac{2}{x^2+1}$

v. $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ R. $\frac{1}{x^2+1}$

x. $g(x) = \tan^{-1}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ R. $\frac{1}{2(x^2+1)}$

y. $u = \ln(arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right))$ R. $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}\arccos(1/\sqrt{x})}$

z. $y = tan(\sin^{-1}(x^2))$ R. $\frac{2x}{(-x^4+1)^{3/2}}$

17. Encuentre y' usando derivación implícita

a. $9x^2 - y^2 = 1$ R. $\frac{9x}{y}$

b. $2x^2 + x + xy = 1$ R. $-\frac{y + 4x + 1}{x}$

c. $\cos(x) + \sqrt{y} = 5$ R. $2\sin(x)\sqrt{y}$

d. $x = sec\left(\frac{1}{y}\right)$ R. $-\frac{y^2\cos\left(\frac{1}{y}\right)^2}{\sin\left(\frac{1}{y}\right)}$

e. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$ R. $-\dfrac{5x^4+4x^3y-3y^2}{x^4-6xy+3y^2}$

f. $4\cos(x)sen(y) = 1$ R. $\dfrac{\cos(y)\cos(x)}{\sin(y)\sin(x)}$

g. $e^y sen(x) = x + xy$ R. $-\dfrac{e^y\cos(x) - y - 1}{e^y\sin(x) - x}$

h. $y = e^{x+y}$ R. $-\dfrac{e^{y+x}}{e^{y+x}-1}$

i. $xy = sen(x+y)$ R. $-\dfrac{\cos(y+x) - y}{\cos(y+x) - x}$

j. $x + y = \cos(xy)$ R. $-\dfrac{\sin(xy)\,y+1}{\sin(xy)\,x+1}$

k. $\dfrac{x+y}{x-y} = x$ R. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^2-2xy+y^2+2y}{x}$

n. $ln\sqrt{x^2+y^2} = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ R. $\dfrac{y+x}{-y+x}$

o. $y = cos(e^{xy})$ R. $-\dfrac{\sin(e^{xy})\,e^{xy}y}{\sin(e^{xy})\,x\,e^{xy}+1}$

p. $e^x + e^y = y$ R. $-\dfrac{e^x}{e^y-1}$

q. $y^2 = \ln(xy)$ R. $\dfrac{y}{x\,(2y^2-1)}$

18. Use derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función.

a. $y = \dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}}{4x+3}$ R. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{8x+5}{\sqrt{(2x+1)(3x+2)}\,(4x+3)^2}$

b. $y = (x+4)(2x+3)(3x-4)$ R. $18x^2+50x-8$

c. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$ R. $\dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}\left[\dfrac{10}{x}+\dfrac{x}{x^2+5}-\dfrac{16x}{24x^2+6}\right]$

d. $y = x^{sen(x)}$ R. $x^{\sin(x)-1}\,(\cos(x)\ln(x)\,x+\sin(x))$

e. $y = x(x-1)^x$ R. $(-1+x)^{-1+x}\left(\ln(-1+x)\,x^2 - x\ln(-1+x) + x^2 + x - 1\right)$

f. $y = (\ln(x))^x$ R. $\ln(x)^{-1+x}\,(\ln(\ln(x))\ln(x)+1)$

g. $y = (sen(x))^{\cos(x)}$ R. $\sin(x)^{\cos(x)-1}\left(\cos(x)^2\ln(\sin(x)) + \cos(x)^2 - \ln(\sin(x))\right)$

h. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$ R. $-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3x^4-4x^3-1}{\sqrt{\dfrac{-1+x}{x^4+1}}\,(x^4+1)^2}$

i. $y = (sen(x))^{\cos(x)} + (cos(x))^{\mathrm{sen}(x)}$ R.

$$\sin(x)^{\cos(x)}\left(-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)}\right) + \cos(x)^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(\cos(x)) - \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}\right)$$

j. $y = x^{\frac{1}{x}}$ R. $x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

k. $y = \frac{e^{-x}cos^2(x)}{x^2+x+1}$ R. $-\frac{e^{-x}\cos(x)^2}{x^2+x+1} - \frac{2\,e^{-x}\cos(x)\sin(x)}{x^2+x+1} - \frac{e^{-x}\cos(x)^2\,(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

19. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ o y'' mediante derivación implícita

a. $x^3 + y^3 = 1$ R. $\frac{-2x}{y^5}$

b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ R. $\frac{1}{2x^{3/2}}$

c. $x^2 - y^2 = 25$ R. $\frac{-1}{y^3}$

d. $x^4 + 4y^2 = 16$ R. $\frac{-1}{y^3}$

e. $x + y = sen(y)$ R. $-\frac{\cos(y)+1}{\sin(y)\left(\cos(y)^2 - 2\cos(y)+1\right)}$

f. $xy^4 = 5$ R. $\frac{5}{16}\frac{y}{x^2}$

g. $4y^3 = 6x^2 + 1$ R. $-\frac{-y^3+2x^2}{y^5}$

h. $x^3 + y^3 = 27$ R. $\frac{-54x}{y^5}$

20. Resuelva los siguientes ejercicios aplicando el concepto de derivada

a. Encuentre los puntos sobre la curva donde la tangente es horizontal (basta con hallar sus coordenadas en x)

   i. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ R. $x = -2, x = 1$
   ii. $y = e^x - 2x$ R. $x = \ln(2)$
   iii. $y = \frac{\cos(x)}{2+sen(x)}$ $con\ \ 0 \le x \le 2\pi$ R. $x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$
   iv. $y = x^2\ln(x)$ R. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

b. Encuentre una ecuación de la recta tangente de acuerdo con los datos dados

   i. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2, x = 1$ ii. $f(x) = (-1+\cos(4x))^3, x = \frac{\pi}{8}$
   iii. $y = 2^{3^{x^2}}, x = 1$ **R.** $\boldsymbol{y - 8 = 48ln2ln3(x-1)}$ iv. $y = x\sqrt{2-x^2},\ x = 1$
   v. $x^4 + y^3 = 24, x = 2$ vi. $f(x) = xarctan(x), x = 1$ **R.** $\boldsymbol{y = \frac{\pi+2}{4}(x-1) + \frac{\pi}{4}}$
   vii. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4, (-3\sqrt{3}, 1)$ viii. $f(x) = arcsen(x-1), x = \frac{1}{2}$
   ix. $f(x) = (e^x+1)^2, x = 0$ x. $f(x) = \ln\left(xe^{-x^3}\right), x = 1$
   xi. $y = x^{x+2}, x = 1$ **R.** $\boldsymbol{y = 3x - 2}$ xi. $ysen(2x) = xcos(2y), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

c. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica que tengan la recta tangente tenga la pendiente dada o la propiedad indicada

   i. $y = (x+1)(2x+5), m = -3$ R. $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$
   ii. $y = \frac{x+4}{x+5}$ $, perpendicular\ a\ \ y = -x$ R. $(-4,0), (-6,2)$
   ii. $y = e^x, paralela\ a\ 3x - y = 7$ R. $(ln3,3)$
   iv. $f(x) = 5 - 2sen(x)\ \ 0 \le x \le 2\pi, paralela\ a\ y = \sqrt{3}x - 1$ R. $\left(\frac{5\pi}{6}, 4\right), \left(\frac{7\pi}{6}, 6\right)$

d. Aplique la red conceptual alrededor de la derivada para resolver los siguientes ejercicios.

i. Encuentre la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11,\ f'(-1) = 7\ y\ f''(-1) = -4.$
R. $a = -2, b = 3, c = -6$

ii. Hallar un polinomio P de segundo grado que satisfaga las condiciones siguientes: $P(2) = 5, P'(2) = 3\ y\ P''(2) = 2.$
R. $P(x) = x^2 - x + 3$

iii. Hallar una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente 8 en $x = -1$ y pasa por el punto (2,15)
R. $y = -x^2 + 6x + 7$

iv. Halle una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya grafica posee tangentes horizontales en $(-2,6)\ y\ (2,0)$
R. $a = {}^3/_{16}, b = 0, c = -{}^9/_4, d = 3$

v. Encuentre los valores de $b\ y\ c$ de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$
R. $b = 8\ , c = -9$

vi. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasan por el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y que es (son) tangente(s) a $f(x) = x^2 + 2x + 2$. (Sugerencia: Dibuje la gráfica de la función y ubique el punto dado).
R. $y = 1, y = 10x - 14$

vii. Encuentre el valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{k+x}{x^2}$ tenga pendiente 5 en $x = 2$.
R. $x = -21$

viii. Sea $g(x) = \frac{x}{e^x}$, encuentre $g'(x), g''(x)\ , g'''(x), g^{(4)}(x)$ e induzca una formula general para $g^{(n)}(x)$
R. $g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}ne^{-x} + (-1)^n xe^{-x}$

ix. Encuentre la 50-ésima derivada de $y = cos(2x)$
R. $y^{(50)} = -2^{50}\cos(2x)$

x. Encuentre la 1000-ésima derivada de $f(x) = xe^{-x}$

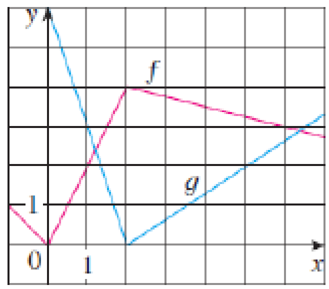
xi. Encuentre constantes $A\ y\ B$ tales que la función $y = Asen(x) + Bcos(x)$ satisface la ecuación $y'' + y' - 2y = sen(x)$
R. $A = -\frac{3}{10}, B = -\frac{1}{10}$

xii. Use la regla de la cadena para mostrar que:
  1. La derivada de una función impar es una función par
  2. La derivada de una función par es una función impar

xiii. Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y use la regla de la cadena para mostrar que $\frac{d(|x|)}{dx} = \frac{x}{|x|}$

xiv. Verifique que $f'(x) = g'(x)$ y explique la relación que existe entre $f\ y\ g$.
  1. $f(x) = \frac{3x}{x+2}\ , g(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ 2. $f(x) = \frac{sen(x)-3x}{x}\ , g(x) = \frac{sen(x)+2x}{x}$

xv. Sean $f\ y\ g$ funciones cuyas graficas son mostradas abajo, sean $u(x) = f\big(g(x)\big), v(x) = g\big(f(x)\big)\ y\ w(x) = g\big(g(x)\big)$. Encuentre cada derivada si esta existe. Si no existe, explique por qué.
  1. $u'(1)$ 2. $v'(1)$ 3. $w'(1)$



R. $u'(1) = {}^{3}/_{4}, \quad v'(1)\ no\ existe, \quad w'(1) = -2$

xvi. La función de posición de un objeto, respecto al suelo, que se deja caer desde una altura de 122.5 m es $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$ donde s se mide en metros y t en segundos.

1. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 2\ s$?
2. ¿En qué instante la pelota golpea al suelo?
3. ¿Cuál es la velocidad de impacto?

R. $-19{,}6\ {}^{mt}/_{s}, \quad 5\ s, \quad -49\ {}^{mt}/_{s}$

xvii. El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Hallar la razón de cambio instantánea del volumen respecto al radio. **Interprete el resultado**

R. $\boldsymbol{\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2\ {}^{u^3}/_{u}}$**. El volumen de la esfera tiende a aumentar en $\boldsymbol{4\pi r^2}$ unidades cúbicas cuando el radio tiende a aumentar en una unidad de longitud**

xviii. La Ley de la Gravitación Universal establece que la fuerza F entre dos masas $m_1\ y\ m_2$ separadas por una distancia r es $F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde K es una constante ¿ Cuál es la razón de cambio instantánea de F respecto a r cuando $r = 2\ km$?. **Interprete el resultado**

R. $\boldsymbol{\frac{dF}{dr}(2) = -\frac{1}{4}Km_1m_2}$. En el instante en que el radio entre las masas es de 2 kilómetros, la fuerza entre las masas tiende a disminuir en $\boldsymbol{\frac{1}{4}Km_1m_2}$ unidades de fuerza

xix. La ecuación de la demanda de un cierto detergente es $x = 1000(50 - 5p - p^2)$ donde se demandan $x\ cajas$ cuando $p\ (pesos)$ es el precio unitario.

1. Determine la tasa de cambio promedio de la demanda con respecto al precio cuando éste se incrementa de $2 a $2.20. **Interprete el resultado**

   R. $\boldsymbol{-26000\ {}^{cajas}/_{pesos}}$. Cuando el precio por caja aumente de 2 a 2.20 pesos el número de cajas demandadas disminuye en 26000

2. Calcule la tasa de cambio instantánea de la demanda con respecto al precio cuando éste es de $2. **Interprete el resultado**

   R. $\boldsymbol{-25000\ {}^{cajas}/_{pesos}}$. En el instante en que el precio por unidad es de 2 pesos, el número de cajas demandadas tiende a disminuir en 25000

xx. La ecuación de la oferta de una cierta clase de bombillos es $x = 1000(4 + 3p + 2p^2)$ donde se ofrecen $x\ bombillos$ cuando el precio unitario es de $p\ (pesos)$.

1. Halle la tasa promedio de cambio de la oferta con respecto al precio cuando éste se incrementa de $90 a $93. **Interprete el resultado**
2. Halle la tasa de cambio instantánea de la oferta respecto al precio cuando éste es de $90. **Interprete el resultado**

xxi. La población de una cierto pueblo t años después del 1 de enero 2019 se espera que sea $f(t)$, donde $f(t) = 10000 - \frac{4000}{t+1}$

1. Utilice la derivada para calcular el cambio esperado de la población del 1 de enero de 2023 al 1 de enero de 2024. **Interprete el resultado**
2. Determine la variación exacta que se espera ocurra en la población del 1 de enero de 2023 al 1 de enero de 2024. **Interprete el resultado**