Taller de preparación para el tercer parcial de Cálculo 1.

1 Calcular la derivada utilizando la definición $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1. $f(x) = 3x^2$
2. $f(x) = 5x^3$
3. $f(x) = \dfrac{-2}{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 4$
6. $f(x) = \sin x$
7. $f(x) = \cos x$

2 Calcular la derivada utilizando la definición $f'(x) = \lim\limits_{w\to x} \frac{f(w)-f(x)}{w-x}$

1. $f(x) = 3x^2$
2. $f(x) = 5x^3$
3. $f(x) = \dfrac{-2}{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 4$

3 Calcular la derivada.

1. $f(x) = 4x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 8x + 4$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
3. $f(x) = \dfrac{-2}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2}$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

6. $f(x) = (x^3 + 2x - 1)(x^2 - 3)$

7. $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

8. $f(x) = \dfrac{5x^2 + 8}{x^2 + 1}$

   Solution is $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

9. $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{3x^3 - 4}$

   Solution is $f'(x) = \dfrac{-54x^2}{(3x^3-4)^2}$

10. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 7x - 6}{x^2 - 2x}$

11. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$

12. $f(x) = 5x^3 \tan(2x) + \sec(x)$

13. $f(x) = e^{2x} \sin^2(2x) + e^{3x} \sin^2(2x)$

14. $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)}$

15. $f(x) = \dfrac{\cos^2(4x)}{1 + \tan^2(4x)}$......................Solution is $f'(x) = -16\cos^3 4x \sin 4x$

16. $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$

4 Recta tangente a la curva.

4.1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

1. $y = x^2 + 1$ en el punto $(2, 5)$

2. $y = 4x^2 + 5x + 6$ en el punto $(1, 15)$

3. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$ en el punto $x = 0$

4. $y = \dfrac{x^2 + 2}{x + 1}$ en el punto $x = 1$

5. $y = 3 + x - 5x^2 + x^4$ en el punto $(0, 3)$

6. $y = \dfrac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$ en el punto $x = 4$

7. $y = \left(x^2 - 7x - 8\right)^2$ en el punto $(8, 0)$

8. $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 8\right)^2}$ en el punto $(3, 1)$

9. $y = \sin(x) + \cos(x)$ en el punto $(0, 1)$

4.2 Encuentre todos los puntos sobre la curva donde la recta tangente es horizontal.

1. $y = \frac{5}{2}x^2 - x^3$

2. $y = \dfrac{x^5}{5} - x + 1$

3. $y = \sin(x) + \cos(x)$

5 Utilizar la Regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

2. $f(x) = \sqrt{5x^3 + 2x^2 - 8x + 2}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{\left(4x^5 - 2x^2\right)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 4}{\sqrt{x^2 + 1}}$

5. $g(s) = \left(\dfrac{2s + 5}{s^2 + 1}\right)^4$

6. $f(t) = \left(t^2 - 4\right)^5 (3t + 5)^4$

7. $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2 (x + 2)}$

8. $g(m) = \dfrac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 1}}$

9. $f(x) = 5^{\left(2x^2 + x\right)}$

10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$

11. $r(s) = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{9}{s^2}$

12. $f(x) = 7^{-x^2/4}$

13. $f(x) = x^2 e^{-x^2/4}$

14. $q(r) = \sqrt{12r - r^2}$

15. $s(t) = \sqrt[7]{t^{-2}}$

16. $g(x) = 8^{2x^2} + 16^{2x^3}$

17. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 2}$

6 Calcular la segunda derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 6x^3 + 8x + 5x^{-3}$

2. $w(z) = 3z^{-6} - \frac{1}{z} + 6^3$

3. $f(t) = \ln\left(\sqrt{t^4 + 1}\right)$

4. $g(t) = te^{-t^2}$

5. $r(s) = \dfrac{3}{s^3} - \dfrac{6}{s} + 2s + 4^2$

6. $f(x) = \dfrac{2}{5x^3} + \dfrac{1}{11x}$

7. $f(x) = \left(8 + \dfrac{4}{x}\right)^4$

8. $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)^{-4}$

9. $f(x) = e^{x^2/2}$

10. $f(x) = 7^{2x} + 3^{2x}$

11. $f(x) = \ln\left(\dfrac{4 + x^4}{x^9}\right)$

12. $f(x) = 6^{x^3} + 2^{x^3}$

13. $f(x) = \log_7\left(\dfrac{7^x}{e^x + 1}\right)$

14. $P(q) = \dfrac{(q+2)(q+6)}{q^3}$

6.1 Trigonometricas inversas. Hallar la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \arcsin(2x-1)$ ....Solution is $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

2. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ ....Solution is $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1+x}{3}\right)$ ....Solution is $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{8-2x-x^2}}$

4. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ....Solution is $f'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2}$

5. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

6. $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

7. $f(x) = \arctan\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

8. $f(x) = \operatorname{arcsec}(x^2+1)$ ....Solution is $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}$

9. $f(x) = x\left[\arctan(2x) + \operatorname{arccot}(2x)\right]$

10. $f(x) = (x^2+1)\arctan x$ ....Solution is $f'(x) = 2x\arctan x + 1$

7 Aplicación a ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una o más derivadas de una función desconocida, la ecuación establece una relación entre la función y sus derivadas. Ejemplo $y'' + 2y' - 3y = 0$.
Una solución de una ecuación diferencial es una función y que satisface la ecuación, es decir que al derivar la función e insertarla en la ecuación se obtiene una igualdad verdadera.
En los siguientes ejercicios verificar que función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y = e^x$

2. $y'' - 7y' + 12y = 0; \quad y = 3e^{4x} + 2e^{3x}$

3. $y'' + 4y = 0; \quad y = \sin(2x)$

4. $y'' - 6y' + 9y = 0; \quad y = 4xe^{3x}$

5. $y'' - 4y' + 13y = 0; \quad y = e^{2x}\cos(3x)$

6. $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

7. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0; \qquad y = 2x^2 \cos(\ln x)$

8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0; \qquad y = x^2 e^x$

9. $y'' + \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) y' = 0; \qquad y = 4 \arctan x$

10. $y''' + y'' = 2x; \qquad y = -x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x + e^{-x}$

8 Derivación implicita.

1. Encuentre los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 12$ donde la recta tangente es paralela al eje x.

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 8x + 6y$ en el punto $(0, 0)$.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4y^2$ en el punto $(0, 2)$.

4. Encuentre los puntos de la curva $x^2+y^2 = 6x+8y$ donde la recta tangente es horizontal.

5. Encuentre los puntos de la curva

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{4} + \frac{y^2 - 4y + 4}{9} = 1$$

donde la recta tangente es horizontal.

6. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln\left(xe^{-x^3}\right)$ en $x = 1$

7. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 - xy + y^3 = -1$ en el punto $(1, 0)$.

8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 + xy - x^2 = 5$ en el punto $(4, 3)$.

9. Encuentre los puntos de la curva $y^2-2yx^2+x^4 = 4$ donde la recta tangente es horizontal.

10. Dada la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx} = \dfrac{-1}{y^3}$

11. Dada la ecuación $x^3 + y^3 = 8$. Demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx} = \dfrac{-16x}{y^5}$

9 Calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \ln(8x^4 + x^2)$

2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{(x^2+1)(x^4+x^2+1)}{x^4+1}\right)$

3. $f(x) = x^{16} \ln \sqrt{x^2+1}$

4. $g(z) = [\ln(z^4)]^2 + \left[\ln\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]^6$

5. $f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$

6. $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$

7. $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2+4}{x^4+1}\right)$

8. $f(x) = \frac{\ln(4x)}{\ln(2x)}$

9. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{(3x+2)^2}{x^4+7}}$

10. $f(t) = \ln\left(\sqrt{5t+1}\,(t^3+4)^6\right)$

11. $f(x) = \log_3\left(\frac{3^{x^3}}{3^{2x^3}+9^{x^3}}\right)$ ....Solution is $f'(x) = -3x^2$

12. $f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

13. $f(x) = 7^{\sqrt{x}}$

14. $f(x) = 5^{9x}$

15. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$

16. $f(x) = \log_7(x^2-6x-2)$

17. $f(x) = 3^x \ln(x^6+8)$

18. $f(x) = \log_2\left(3^{x^2}\right)$

19. $f(x) = \log_2\left[(4x^2)\left(2^{x^2}\right)\right]$

20. $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{3\sqrt{x^2+1}}\right)$

21. $f(x) = x^4 e^{2x}$