1 Desigualdades

Si a y b son números reales, se dice que a es mayor que b y se simboliza: $a > b$, si $a - b$ es un número positivo.

1.1 Propiedades de las desigualdades

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple:

D.1. Antisimetría: si $a > b$ y $b > a \Rightarrow a = b$

D.2. Transitividad: si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$

D.3. Monotonía: si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

D.4. si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow a \times c > b \times c$

D.5. si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$

1.2 Valor absoluto de un número real

Se define el valor absoluto de un número real a así: $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a > 0 \\ 0 \text{ si } a = 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Ejemplo 1 $|-7| = -(-7) = 7$, $\left|\frac{11}{5}\right| = \frac{11}{5}$

Geométricamente, el valor absoluto de un número es la distancia que lo separa del cero o punto de referencia.

1.2.1 Propiedades del valor absoluto

V.A.1. El valor absoluto de un número real siempre es mayor o igual a cero.

V.A.2. Sea $b > 0$ afirmar que $|a| = b$ es equivalente a afirmar que $a = b \vee a = -b$ esto se simboliza como $|a| = b \Leftrightarrow a = b \vee \ a = -b$

V.A.3. Sea $b > 0$ afirmar que $|a| < b$,es equivalente a afirmar que $-b < a$ y que $a < b$ lo cual se puede resumir en $-b < a < b$.

V.A.4. Sea $b > 0$ afirmar que $|a| > b$,es equivalente a afirmar que $a < -b$ o que $a > b$

V.A.5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ desigualdad triangular.

1.3 Ecuaciones con valor absoluto

A partir de la definición de valor absoluto y de las propiedades del mismo se pueden resolver ecuaciones con valor absoluto.

Ejemplo 2 $|x-3| = |-x+1|$ *de acuerdo a la definición de valor absoluto se tendría que* $x-3 = -x+1 \vee x-3 = -(-x+1)$ *si* $x-3=-x+1 \Rightarrow x+x = 1+3 \Rightarrow x=2,$ *si* $x-3 = -(-x+1) \Rightarrow x-3 = x-1 \Rightarrow x-x = -1+3$ *pero esto lleva a* $0=2$ *lo cual es absurdo. Luego la única solución posible es* $x=2$

Ejemplo 3 $|-7x-13| = 1 \Rightarrow -7x-13 = 1 \vee -(-7x-13) = 1$ *de* $-7x-13 = 1$ *se tiene que* $x=-2,$ *de* $-(-7x-13) = 1$ *se llega a* $7x+13 = 1 \Rightarrow x = \frac{-12}{7}$ *luego el conjunto solución es* $\left\{\frac{-12}{7}, -2\right\}$

1.4 Inecuaciones algebraícas

Una inecuación algebraíca es una desigualdad en la cual aparece al menos un término desconocido, variable o indeterminada.

Ejemplo 4 $x+7 < -5,\ x^2-4x+4 \geq 0, |x+7| \geq 3,\ \dfrac{x+3}{2x-1} < x-5$

1.4.1 Resolución de inecuaciones

Resolver una inecuación es un proceso mediante el cual se determinan los valores reales que satisfacen la condición dada, en este proceso es necesario aplicar las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo 5 $12x+1 < 3+5x \Rightarrow 12x-5x < 3-1 \Rightarrow 7x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{7}$ *el conjunto solución es el intervalo* $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$

Ejemplo 6 $7x-4 \geq 3x-8 \Rightarrow 7x-3x \geq -8+4 \Rightarrow 4x \geq -4 \Rightarrow x \geq -1$ *el conjunto solución es el intervalo* $[-1, \infty)$

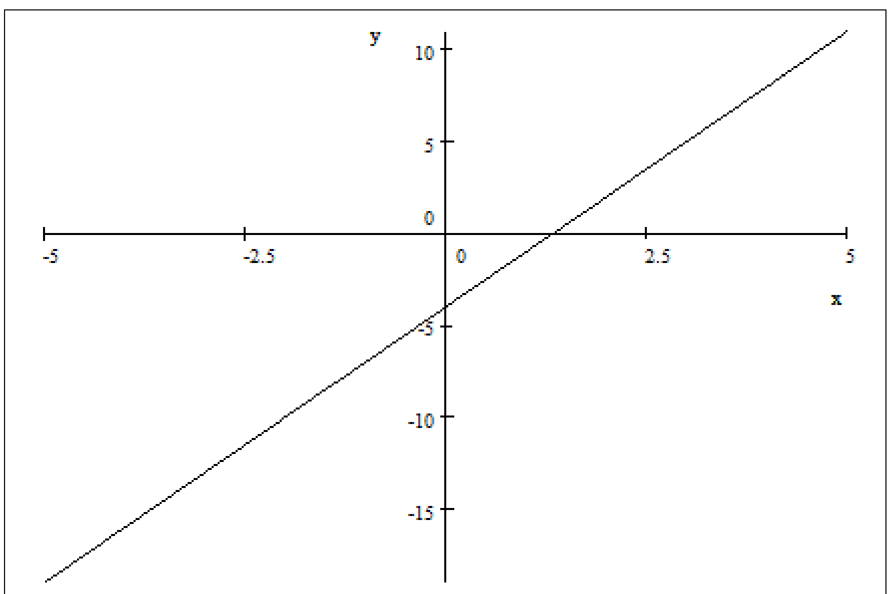
Ejemplo 7 $\dfrac{2x+1}{x-3} > 3$ *Una observación que nunca debe olvidarse es que no es posible multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por* $x-3$ *ya que no sabemos si* $x-3$ *es positivo o negativo, si fuese positivo no habría problemas, no se alteraría el sentido de la desigualdad, pero si* $x-3$ *es negativo al multiplicar se invertiría el sentido de la desigualdad de acuerdo a la propiedad D.5. Veamos entonces como proceder: si* $\dfrac{2x+1}{x-3} > 3 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-3} - 3 > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-3} - 3\dfrac{x-3}{x-3} > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{3(x-3)}{x-3} > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1-3(x-3)}{x-3} > 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1-3x+9}{x-3} > 0 \Rightarrow \dfrac{-x+10}{x-3} > 0$ *si el cociente entre dos expresiones es mayor que cero, entonces o ambas son positivas o ambas son negativas, si ambas son positivas:* $-x+10 > 0 \wedge x-3 > 0 \Rightarrow -x > -10 \wedge\ x > 3 \Rightarrow x < 10 \wedge\ x > 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 10) \cap (3, +\infty) = (3, 10).$ *Si ambas son negativas:* $-x+10 < 0 \wedge x-3 < 0 \Rightarrow -x < -10 \wedge\ x < 3 \Rightarrow x > 10 \wedge\ x < 3 \Rightarrow x \in (10, +\infty) \cap (-\infty, 3) = \varnothing \Rightarrow$ *el conjunto solución es* $(3, 10)$

Ejemplo 8 $-x^2+4x-3 \leq 0$ *si multiplicamos por* -1 *ambos miembros de la desigualdad para que el coeficiente del término cuadrático sea positivo, se invertirá el sentido de la desigualdad, se tiene entonces que* $-x^2+4x-3 \leq 0$ *es equivalente a* $x^2-4x+3 \geq 0$ *esta expresión se factoriza como* $(x-3)(x-1) \geq 0$ *aquí también podemos afirmar que si el producto de dos números es mayor o igual que cero es porque o ambos son mayores o iguales que cero o ambos son menores o iguales que cero. Entonces,* $[x-3 \geq 0 \ \wedge \ x-1 \geq 0] \vee [x-3 \leq 0 \ \wedge \ x-1 \leq 0], \Rightarrow$ $[x \geq 3 \wedge x \geq 1] \vee [x \leq 3 \ \wedge \ x \leq 1] \Rightarrow x \in [[3,\infty) \cap [1,\infty)] \cup [(-\infty,3] \cap (-\infty,1]] =$ $[3,\infty) \cup (-\infty,1]$.

Hay otra forma de interpretar la situación anterior consideremos el hecho que $(x-3)$ y $(x-1)$ son factores lineales, esto significa que si consideramos las ecuaciones $y = x-3 \wedge \ y = x-1$ su gráfica son líneas rectas continuas y una línea recta continua sólo puede cortar una vez al eje x, por tanto sólo es posible una de estas dos situaciones: o antes del corte, la recta está por debajo del eje x y en consecuencia y toma valores negativos y despues del corte necesariamente la recta estará por encima del eje x, tomando y valores positivos o viceversa.

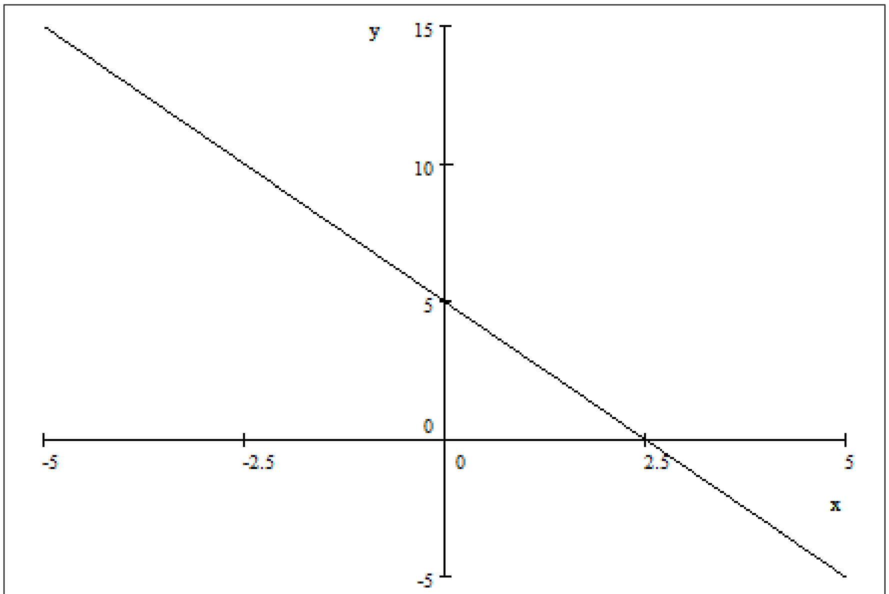
Analicemos la situación mediante un gráfico.

Para $y = 3x-4$



Cuando x toma el valor $\frac{4}{3}$ la recta $y = 3x-4$ corta al eje x.

Para $y = -2x+5$



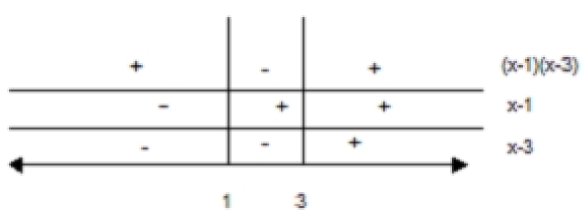
En $x = \frac{-5}{2}$ la recta corta al eje x.

Teniendo en cuenta estos hechos, una vez se ha descompuesto un expresión algebraíca en factores lineales, es posible considerar valores de prueba en cada uno de los intervalos determinados por los puntos en donde las rectas que corresponden a los factores lineales cortan al eje x.

Ejemplo 9 *Volviendo a nuestro ejemplo se tiene entonces que para* $(x-3)(x-1) \geq 0$, *los puntos de corte son* $x = 3$ *y* $x = 1$ *consideremos entonces los intervalos* $(-\infty, 1), (1, 3), (3, +\infty)$, *en cada uno de estos intervalos consideremos valores de prueba, y analicemos el comportamiento de las rectas* $y = x - 3 \wedge y = x - 1$ *en estos intervalos. Tomaremos como valores de prueba* $0 \in (-\infty, 1], 2 \in [1, 3]$ *y* $4 \in [3, +\infty)$,

Intervalo	$(-\infty, 1]$	$[1, 3]$	$[3, +\infty)$
Valor de prueba	*0*	*2*	*4*
$x - 3$	$0 - 3 < 0$	$2 - 3 < 0$	$4 - 3 > 0$
$x - 1$	$0 - 1 < 0$	$2 - 1 > 0$	$4 - 1 > 0$

Con la ayuda del siguiente diagrama se termina de resolver el problema



Por tanto $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ *se cumple cuando* $x \in (-\infty, 1]$ *o cuando* $x \in [3, +\infty)$*luego el conjunto solución es* $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

Ejemplo 10 *Resolver la desigualdad* $\frac{2x+1}{x-3} > 3$

Solución 11 *Es necesario que uno de los miembros de la desigualdad sea cero, para ello es necesario restar 3 a cada uno de los miembros de la desigualdad:*

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-3} - 3 &> 3 - 3 \\ \frac{2x+1}{x-3} - 3 &> 0 \end{aligned}$$

Buscando denominador común:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1-3(x-3)}{x-3} &> 0 \\ \frac{2x+1-3x+9}{x-3} &> 0 \\ \frac{10-x}{x-3} &> 0 \end{aligned}$$

Si el cociente entre dos cantidades es mayor que cero, entonces ambas son positivas o ambas son negativas, por tanto,

$$10 - x > 0 \;\wedge\; x - 3 > 0 \;\vee\; 10 - x < 0 \;\wedge\; x - 3 < 0$$

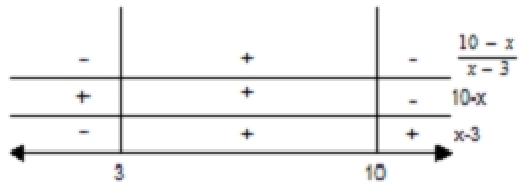
.Observemos ahora que tenemos tanto el conjunto de los números reales como la recta numérica dividido en 3 subintervalos:$(-\infty, 3), (3, 10), (10, +\infty)$ *,consideremos un número cualquiera en cada uno de estos intervalos y veamos qué valor toma la expresión* $\frac{10-x}{x-3}$ *en cada caso :*

Intervalo	$(-\infty, 3)$	$(3, 10)$	$(10, +\infty)$
Número	*2*	*4*	*11*
Cálculo	$\frac{10-2}{2-3} = -8$	$\frac{10-4}{4-3} = 6$	$\frac{10-11}{11-3} = \frac{-1}{8}$
Sentido	$-8 < 0$	$6 > 0$	$\frac{-1}{8} < 0$

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 10)$ *ya que aquí la expresión* $\frac{10-x}{x-3} > 0$*. El diagrama de signos confirma lo dicho*

Ejercicio 12 *Resolver las siguientes inecuaciones*

1. $\frac{3}{4}x - \frac{5}{8} < \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
2. $-x^2 + 6x - 9 > 0$
3. $\dfrac{2x+7}{8x-5} > -3$



4. $\dfrac{x^2+2x+3}{x+1} < x+2$
5. $\dfrac{3x^2+8x-2}{3x-4} \leq x-2$
6. $(x+3)\,(x-5) \geq (2x+1)\,(x-4)$
7. *Si las ganancias de una pequeña empresa son* $-x^2+160x-4800$*, donde* x *representa el número de unidades producidas, determine el número de unidades que producirán gananacias de por lo menos 1200.*
8. *Si una empresa vende* x *cantidad de artículos, el costo total es de* $145x+245$ *y los ingresos totales son de* $2x^2-144x+100$*.¿Cuántos artículos se tendrán que vender para que empiecen a haber ganancias?*