Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 3

10 de abril de 2018

1. Halle la solución de

   a) $2y''' - y'' + 18y' - 9y = 0$.
   b) $y''' - 2y'' - 2y' - 3y = 0$.
   c) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.
   d) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.
   e) $y^{(4)} - 16y = 0$.
   f) $y^{(4)} + 16y = 0$.
   g) $y'' + 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 2,\ \ y'(0) = y''(0)$.
   h) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$. (**Resp/** $y = e^{-x}[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x]$).
   i) $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0$.

2. Halle la solución de las siguientes ecuaciones usando el método de coeficientes indeterminados

   a) $y''' - y'' = 2 - 6x$.
   b) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.
   c) $y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}$.(**Resp/** $y = \frac{1}{2}x^2e^x + e^{2x}$.**)**
   d) $y'' + y = xe^x \sin 2x$.(**Resp/** $y = \frac{1}{50}(11 - 5x)e^x \sin 2x + \frac{1}{50}(2 - 10x)e^x \cos 2x$.**)**
   e) $y'' + 4y = \sin x$.
   f) $y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2$.
   g) $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x}\cos 2x$.
   h) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = \sin 2x + 6e^{3x}$.

3. Halle la solución de las siguientes ecuaciones usando el método de variación de parámetros.

   a) $y'' + 4y = \sec 2x$.(**Resp/** $y = (A + \frac{1}{2}x)\sin 2x + (B + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|)\cos 2x$.**)**
   b) $y'' - y = \sec^3 x - \sec x$. (**Resp/** $y = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}\sec x$.**)**
   c) $y''' + y' = \tan x$

d) $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \ln x$.

4. Resuelva las ecuaciones de Cauchy-Euler.

   a) $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$.
   b) $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$.
   c) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$.
   d) $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x+1}$.
   e) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + \ln x^3$.

5. Halle la solución en cada de cada una de la siguientes ecuaciones diferenciales dado que y_1 es una solución de la homogénea asociada.

   a) $x^2y'' - xy' - 3y = x^2, \quad y_1(x) = x^3$.
   b) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2+1)^2, \quad y_1(x) = x$.
   c) $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x+3)\dfrac{dy}{dx} + 3y = 4x^4e^x, \quad y_1(x) = e^x$.
   d) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}\cos x, \quad y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$.
   e) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2, \quad y_1(x) = x$.
   f) $y'' + (\tan x)y' - 6\left(\cot^2 x\right)y = \cos^2 x, \quad y_1(x) = 2\sin^3 x$.
   g) $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = (x^2-1)^2, \quad y_1(x) = x^4$.
   h) $(x^4 + x^2)y'' - (x^3 - x)y' - 4y = (x^2+1)^2, \quad y_1(x) = x^2$.
   i) $y'' - (2\tan x)y' + 3y = 2\sec x, \quad y_1(x) = \sin x$.
   j) $(x\sin x + \cos x)\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x\cos x)\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = x, \quad y_1(x) = x$.

6. Halle la solución general de la ecuación

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x}$$

   para $x > 0$, si se sabe que una solución de la ecuación homogénea es de la forma $y_1 = e^{rx}$. (Ayuda: Halle el valor o valores exacto(s) de r).

7. Una masa que pesa 24 libras, unida al extremo de un resorte, lo alarga 4 pulgadas. Al inicio, la masa se libera desde el reposo en un punto 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la ecuación del movimiento.
   Resp/ $x(t) = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$**.**

8. Una fuerza de 400 newtons alarga 2 metros un resorte. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo del resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $10\,m/s$. Encuentre la ecuación del movimiento.
   Resp/ $x(t) = -5\sin 2t$**.**

9. Un resorte de 4 pies mide 8 pies de largo después de colgarle una masa que pesa 8 libras. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\sqrt{2}$ veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si la masa se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s. Calcule el tiempo

en que la masa alcanza su desplazamiento extremo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

Resp/ $t = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **segundos y el desplazamiento extremo es** $x = 5\sqrt{2}\,\dfrac{e^{-1}}{4}$ **pies.**

10. Después que una masa de 10 libras se sujeta a un resorte de 5 pies, éste llega a medir 7 pies. Se retira la masa y se sustituye con una de 8 libras. Luego se coloca al sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea.

    a) Encuentre la ecuación del movimiento si la masa se libera inicialmente desde el reposo de un punto situado a 0.5 pies arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 pies/s.

    b) Escriba la solución en la forma $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ (ver Página 189, Dennis Zill, Décima edición).

    c) Calcule los tiempos en que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo.

    Resp/ a) $x(t) = e^{-2t}(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)$**, b)** $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2t}\sin(4t + \frac{\pi}{4})$**, c)** $t = \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}$**,** $n = 1, 2, \ldots$**.**

11. Una masa de 5 kilogramos extiende un resorte 49 centímetros. La masa se mueve en un medio que imparte una fuerza viscosa de 2 newtons cuando la velocidad de la masa es de 4 cm/seg. Si la masa se pone en marcha 10 centímetros por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad inicial de 3 cm/seg, formular el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa y determine la solución del mismo.
    Resp/ $x(t) = e^{-5t}(0,1686e^{\sqrt{5}t} - 0,0685e^{-\sqrt{5}t})$**.**

12. Una masa que pesa 16 libras alarga 8/3 pies un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 0.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos 3t$.
    Resp/ $x(t) = e^{-t/2}\left[-\frac{4}{3}\cos(\frac{\sqrt{47}}{2}t) - \frac{64}{3\sqrt{47}}\sin(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\right]$**.**

13. Una masa de 1 slug está unida a un resorte cuya constante es de 5 lib/pie. Al inicio la masa se libera 1 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 pies/s y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento de igual a 2 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si una fuerza externa igual a $f(t) = 12\cos 2t + 3\sin 2t$ actúa sobre la masa.
    Resp/ $x(t) = e^{-t}\cos 2t + 3\sin 2t$**.**

14. Una masa de 1 slug, cuando se une a un resorte, causa en éste un alargamiento de 2 pies y luego llega al punto de reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = 8\sin 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 8 veces la velocidad instantánea.
    Resp/ $x(t) = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$**.**

15. Cuando una masa de 2 kilogramos se une a un resorte cuya constante es de $32\,N/m$, éste llega al reposo en la posición de equilibrio. Comenzando en $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t}\cos 4t$ se aplica al sistema. Determine la ecuación del movimiento en ausencia de amortiguamiento.
Resp/ $x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\sin 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t - 2e^{-2t}\sin 4t$**.**

16. Un peso de 200 N está suspendido verticalmente de un resorte, el cual estira 20 centímetros el resorte en equilibrio estático. El cuerpo también está fijo a un sistema de amortiguamiento que proporciona una resistencia numéricamente igual 40 veces la velocidad instantánea.

    a) Si el peso se empuja en el instante $t = 0$ hacia abajo, 140 centímetros de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $2,8\,\mathrm{m/s}$, encuentre la función de posición $x(t)$. ¿En qué estado de amortiguamiento se encuentra el sistema?

    b) Si al cuerpo se le ejerce una fuerza externa dada por $f(t) = \frac{46}{10}\sin(2t) + \frac{4}{10}\cos(2t)$, encuentre la posición del cuerpo en $t = \pi/2$ suponiendo las mismas condiciones iniciales del inciso anterior.

17. Una masa de 5 kilogramos extiende un resorte 9,8 centímetros. Sobre la masa actúa una fuerza externa de $f(t) = 25\sin t$ newtons y se mueve en un medio que imparte una fuerza viscosa de 4 newtons cuando la velocidad de la masa es de $40\,\mathrm{cm/seg}$. Si la masa se pone en marcha 10 centímetros por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad inicial de $2\,\mathrm{cm/seg}$, formular el problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa y determine la solución del mismo.
Resp/ $x(t) = e^{-t}(0,2176\cos 3t - 0,0097\sin 3t) - \frac{2}{17}\cos t + \frac{9}{17}\sin t$**.**