Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 4

9 de mayo de 2018

1. Evalúe

    a) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$.
    b) $\mathcal{L}\{e^{3t}(9 - 4t + 10 \sin \frac{t}{2})\}$.
    c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$.
    d) $\mathcal{L}\{(t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$.
    e) $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)\}$.
    f) $\mathcal{L}\{\sin t\, \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})\}$.
    g) $\mathcal{L}\{\cos t\, \mathcal{U}(t-\pi)\}$.

2. Evalúe

    a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$.
    b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$.
    c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$.
    d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\}$.
    e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)}e^{-2s}\right\}$.
    f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$.

3. Use la fórmula de la derivada de la transformada

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

para demostrar que

$$\boxed{\mathcal{L}\{t \sin kt\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}.}$$

(Esta fórmula puede ser usada en los próximos ejercicios.)

4. Use la fórmula de la derivada de la transformada para evaluar

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s-3}{s+1}\right)\right\}$.

   b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)\right\}$.

5. Si suponemos que $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}$ existe y $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, demuestre que

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(u)du.}$$

   Use esta fórmula para hallar la transformada de

   a) $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

   b) $f(t)=\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$.

6. Use el teorema de convolución en su forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

   para demostrar que

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}=\frac{\sin kt-kt\cos kt}{2k^3}.}$$

7. Resuelva el PVI dado.

   a) $y'+y=f(t)$, $y(0)=0$, donde

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ -1, & t\ge 1.\end{cases}$$

   b) $y'+2y=f(t)$, $y(0)=0$, donde

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$$

   c) $x''+x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, donde

$$f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0\le t<2\pi\\ 0, & t\ge 2\pi.\end{cases}$$

   d) $x''+4x'+4x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, donde

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<2\\ 0, & t\ge 2.\end{cases}$$

e) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

f) $\dfrac{d^2q}{dt^2} + 20\dfrac{dq}{dt} + 1000q = 50e(t)$, $q(0) = 5$, $q'(0) = 1$, donde

$$e(t) = \begin{cases} 6, & 0 \leq t < 1 \\ 4t + 2, & 1 \leq t < 2 \\ 5t, & t \geq 2. \end{cases}$$

Determine la solución de las siguientes ecuaciones integrales e integro-diferenciales

a)

$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau)d\tau, \quad y(0) = 0.$$

b)

$$\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

c)

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\theta)d\theta = 1, \quad y(0) = 0.$$

d)

$$f(t) + \int_0^t f(y)(t - y)\, dy = t.$$

e)

$$t - 2f(t) = \int_0^t f(t - y)(e^y - e^{-y})\, dy.$$

f)

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t - \tau)\, d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$$

g)

$$f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (t - y)^3 f(y)\, dy.$$

h)

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau)\, d\tau.$$

i)

$$f(t) = 2t - 4\int_0^t \sin\tau f(t - \tau)\, d\tau.$$

j)

$$f(t)+3\int_0^t f(y)\sin(t-y)\,dy=-3\int_0^t \sin(2y)\sin(t-y)\,dy.$$

k)

$$f(t)-2\int_0^t f(y)\sin(2(t-y))dt=t-\cos t\,\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

l)

$$f'\,(t)+13\int_0^t f\,(x)\;\mathrm{d}x-6\,f\,(t)=13\,t+13\,(t-2)\mathscr{U}\,(t-2)\,,\quad f(0)=0.$$

m)

$$f'\,(t)+18\int_0^t f(x)\,dx-6\,f(t)=18t+18\,(t-3)\mathscr{U}\,(t-3)\,,\quad f(0)=0.$$

8. Ejercicios de la sección 7.4, página 302: 49-54.