Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 1

15 de agosto de 2018

1. Diga si la función indicada satisface la ecuación diferencial y en tal caso determine un intervalo de definición para cada solución.

   a) $y = (1 + \sin x)^2, \qquad (y')^2 - 4y\cos^2 x = 0.$

   b) $y = 2(x + \sqrt{-x}), \qquad \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{2(x+1)} - 1\right) = 0.$

   c) $y = e^x \ln(cx), \qquad x(y' - y) - e^x = 0.$

   d) $y = \ln(x + c) + 2, \qquad y'e^{y-2} - 1 = 0.$

   e) $y = -\cos x \ln(\sec x + \tan x), \qquad y'' + y = \tan x.$

   f) $y = \dfrac{1}{1 + 2e^{-x}}, \qquad y' = y - y^2.$

   g) $y = (1 - \sin x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad 2y' = y^3 \cos x.$

2. Determine la región R donde el PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

   garantiza la existencia y unicidad de soluciones, donde f es la función:

   a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$

   b) $f(x, y) = \dfrac{1 + y^2}{\sqrt{x^2 - 9}}.$

   c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}.$

   d) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2).$

   e) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{y - x}}.$

f) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-y}}$.

g) $f(x,y) = -\frac{1}{2}x\ln(y-1)$.

h) $f(x,y) = 5x^2(4y-1)^{\frac{1}{4}}$.

i) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[4]{x^2-y}}$.

j) $f(x,y) = \dfrac{(y-x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2-y}}$.

k) $f(x,y) = x\ln(\ln y)$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones homogéneas.

   a) $(2x^2+y^2)dx - x^2dy = 0$.

   b) $(3y^2+4xy-x^2)dx - (2x^2+2xy)dy = 0$.

   c) $(x^3-x^2y-10xy^2-3y^3)dx + (3xy^2+7x^2y)dy = 0$.

   d) $(3x^3-3x^2y-6xy^2-y^3)dx + (xy^2+5x^2y)dy = 0$.

   e) $[4x\cos(y/x) - 3x\sin(y/x) - y]dx + xdy = 0$.

   f) $x(2y^4-x^4)\dfrac{dy}{dx} = y(y^4-x^4)$.

   g) $(x^2y-xy^2+y^3)dx + (x^3+x^2y+xy^2)dy = 0$.

   h) $(x+ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$.

   i) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$.

4. Halle la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

   a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(2) = 2. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} (e^{3y}\cos x - y\cos x)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin 3x}{e^{-y}} \\ y(1) = 1. \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (y^4-1)x^2\cos 3x \\ y(0) = -2. \end{cases}$

   d) $\begin{cases} \cos y\ \cos x\ (\sin y - 1)dx + (\sin x\ \cos^2 y - \sin x\ \sin y)dy = 0 \\ y(\frac{\pi}{4}) = 0. \end{cases}$

5. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0$.

   b) $(y^2+2xy)dx - x^2dy = 0$.

   c) $(2xy+2y^3)dx + (3x^2+10xy^2)dy = 0$.

   d) $(y+\cos^2 x)dx + (\frac{3}{2}x + xy + \frac{1}{2}\sin x\cos x)dy = 0$.

e) $(2y + 3xy^2)dx + (x + 2x^2y)dy = 0$.

f) $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$.

g) $(xy - y)dx + (x^2 - 2x + y)dy = 0$.

h) $2ydx + (1 - \ln y - 2x)dy = 0$.

1) Demuestre que no son exactas.

2) Halle un factor integrante.

3) Halle la solución general en cada caso.

6. Las siguientes ecuaciones diferenciales tienen un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^a y^b$. Halle los valores exactos de a y b. Halle la solución general.

a) $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$.

b) $(3x^4y - 2x^2y^3)dx - (4x^3y^2 + 2x^2y^2)dy = 0$.

c) $(3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy = 0$.

7. Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que la función $y = e^{mx}$ sea solución de la ecuación diferencial dada.

a) $y'' = -3y' - 2y$.

b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = 0$.

8. Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que la función $y = x^m$ sea solución de la ecuación diferencial dada.

a) $x^2\dfrac{dy}{dx} - 3x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$.

b) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$.