

Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 4

25 de octubre de 2018

1. Evalúe

- a) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$.
- b) $\mathcal{L}\{e^{3t}(9 - 4t + 10 \sin \frac{t}{2})\}$.
- c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$.
- d) $\mathcal{L}\{(t - 1)\mathcal{U}(t - 1)\}$.
- e) $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t - 2)\}$.
- f) $\mathcal{L}\{\sin t \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})\}$.
- g) $\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\}$.

2. Evalúe

- a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 34}\right\}$.
- b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4s + 5}\right\}$.
- c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s - 1}{s^2(s + 1)^3}\right\}$.
- d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + 1)}e^{-s}\right\}$.
- e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s + 1)}e^{-2s}\right\}$.
- f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1 + e^{-2s})^2}{s + 2}\right\}$.

3. Use la fórmula de la derivada de la transformada

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

para demostrar que

$\mathcal{L}\{t \sin kt\} = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}.$

(Esta fórmula puede ser usada en los próximos ejercicios.)

4. Use la fórmula de la derivada de la transformada para evaluar

a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \left(\frac{s-3}{s+1} \right) \right\}.$

b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \arctan \left(\frac{1}{s} \right) \right\}.$

5. Si suponemos que $\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$ existe y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, demuestre que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(u) du.$$

Use esta fórmula para hallar la transformada de

a) $f(t) = \frac{\sin t}{t}.$

b) $f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}.$

6. Use el teorema de convolución en su forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

para demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + k^2)^2} \right\} = \frac{\sin kt - kt \cos kt}{2k^3}.$$

7. Resuelva el PVI dado.

a) $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & t \geq 1. \end{cases}$$

b) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

8. Use únicamente argumentos de transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de masa-resorte. (Aceleración de la gravedad: 32 pies/ s^2 o 10 m/ s^2)

- a) Una masa de 1 slug está unida a un resorte cuya constante es de 4 lb/pie. Al inicio la masa se libera del reposo desde la posición de equilibrio. El movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si una fuerza externa igual a

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

actúa sobre la masa.

- b) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32 pies. Si el peso se libera a partir del reposo y desde la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

- c) Una masa de $1/4$ slug, cuando se une a un resorte, causa en éste un alargamiento de 8 pies y luego llega al punto de reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento $x(t)$ si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea.

- d) Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del reposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si una fuerza de

$$f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$

actúa sobre el sistema. Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento.

- e) Resuelva el problema anterior si la fuerza aplicada en este caso es

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

- f) Una fuerza de 10 newtons alarga 10 metros un resorte. Una masa de 1 kilogramo se une al extremo del resorte y se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s. Determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

- g) Una masa que pesa 30 newtons estira un resorte 10 metros y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 4 N cuando la velocidad de la masa es 2 m/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ (en N) dada por

$$f(t) = \begin{cases} 72t, & 0 \leq t < 1 \\ 72, & t \geq 1 \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

- h) Un resorte de 5 metros mide 25 metros de largo después de colocarle una masa que pesa 40 newtons. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 9 veces la velocidad instantánea. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del

reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ (en N) dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 60t - 60, & 1 \leq t < 2 \\ 120t - 180, & t \geq 2, \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

9. Determine la solución de las siguientes ecuaciones integrales e integro-diferenciales

a)

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

b)

$$\int_0^t f(\tau) f(t - \tau) d\tau = 6t^3.$$

c)

$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0.$$

d)

$$\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

e)

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\theta) d\theta = 1, \quad y(0) = 0.$$

f)

$$f(t) + \int_0^t f(y)(t - y) dy = t.$$

g)

$$t - 2f(t) = \int_0^t f(t - y)(e^y - e^{-y}) dy.$$

h)

$$f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$$

i)

$$f(t) = 1 + t - \frac{8}{3} \int_0^t (t - y)^3 f(y) dy.$$

j)

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau) d\tau.$$

k)

$$f(t) = 2t - 4 \int_0^t \sin \tau f(t - \tau) d\tau.$$

l)

$$f(t) + 3 \int_0^t f(y) \sin(t-y) dy = -3 \int_0^t \sin(2y) \sin(t-y) dy.$$

m)

$$f(t) - 2 \int_0^t f(y) \sin(2(t-y)) dt = t - \cos t \mathcal{U} \left(t - \frac{\pi}{2} \right).$$

n)

$$f'(t) + 13 \int_0^t f(x) dx - 6 f(t) = 13t + 13(t-2) \mathcal{U}(t-2), \quad f(0) = 0.$$

$\tilde{n}$)

$$f'(t) + 18 \int_0^t f(x) dx - 6 f(t) = 18t + 18(t-3) \mathcal{U}(t-3), \quad f(0) = 0.$$