

Departamento de Matemáticas

Final de Práctica

Noviembre de 2018

Nombre: _____

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de **80 minutos**.
 - El uso y/o posesión de cualquier tipo de celular y/o calculadora durante el examen es causal de anulación.
1. [1.0 pts] Una masa de 1 kg estira un resorte 5 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a dos veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa de $f(t) = 1 - 2\mathcal{U}(t - 1)$ actúa sobre la masa. **Plantee (solamente) el PVI que modela el problema.** (Aceleración de la gravedad: 10 m/s^2).

2. [2.5 pts]

a) [0.5 pts] Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

b) [0.5 pts] Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}\right\} = 1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$.

c) [0.5 pts] Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t - 1) - e^{-(t-1)} \cos(t - 1)\mathcal{U}(t - 1) - e^{-(t-1)} \sin(t - 1)\mathcal{U}(t - 1)$.

d) [1.0 pts] Resuelva el PVI

$$x'' + 2x' + 2x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

donde $f(t)$ es la función del inciso a).

3. [1.5 pts] Resuelva la ecuación integral $y(t) = 1 + t - 4 \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau$.

Tabla de transformadas

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}, \quad s > a$	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}, \quad s > 0$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad s > 0$
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$	$\mathcal{L}\{f(t - a)\mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as}F(s), \quad a > 0$
$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$, donde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\theta)g(t - \theta)d\theta$.
$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$