UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas

Final A

16 de Noviembre de 2018

Nombre:________________________________**Profesor:**________________________________

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de **80 minutos**.
- El uso y/o posesión de cualquier tipo de celular y/o calculadora durante el examen es causal de anulación.

1. [1.0 pts] Un peso de 10 Newtons estira un resorte 5/3 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a cuatro veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa de $f(t) = 3 - 6\mathcal{U}(t-1)$ actúa sobre la masa. **Plantee (solamente) el PVI que modela el problema**. (Aceleración de la gravedad: 10 m/s^2).

2. [2.5 pts]

   a) [0.5 pts] Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{3}{s} - \dfrac{6}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ -3 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases}$

   b) [0.5 pts] Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6))}\right\} = 1 - e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t)$.

   c) [0.5 pts] Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)}\cos\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1) - \sqrt{2}e^{-(t-1)}\sin\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1)$.

   d) [1.0 pts] Resuelva el PVI

   $$x'' + 4x' + 6x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

   donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

3. [1.5 pts] Resuelva la ecuación integral $f(t) - 1 = 3t - 9\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$.

Tabla de transformadas

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}, \quad s > 0$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}, \quad s > 0$
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad a > 0$
$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, donde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\theta)g(t-\theta)d\theta$.
$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{d}{ds}F(s)$