Nombre:
Código:
Grupo:

RESPUESTAS: **1**.b, **2**.a,b, **3**. b,c, **4**. c

1. (Vale el 25% de la nota) El valor $k$ para el que la ecuación diferencial

$$\left(y^3 + kxy^4 - 2x\right) dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

es exacta es

   (a) -10
   (b) 10
   (c) 0

Solución: Por el criterio de la ecuaciones exactas se tiene que necesariamente

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 + kxy^4 - 2x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2 + 20x^2y^3\right),$$

Equivalentemente

$$3y^2 + 4kxy^3 = 3y^2 + 40xy^3.$$

Concluimos que

$$4k = 40.$$

Es decir $k = 10$.

2. (Vale el 25% de la nota) La solución de la ecuación diferencial

$$t^2\frac{dy}{dt} + y^2 = ty$$

es

   (a) $\mathrm{e}^{t/y} = -ct$
   (b) $\mathrm{e}^{t/y} = ct$
   (c) $\mathrm{e}^{-t/y} = ct$

Solución: La ecuación se puede resolver como una ecuación de Bernoulli o como una ecuación homogénea. Aplicando el método de las ecuaciones homogéneas definimos el cambio de variable $y = ut$, por lo tanto

$$\frac{dy}{dt} = u + t\frac{du}{dt}.$$

Remplazando en la ecuación diferencial dada queda

$$t^2\left(u + t\frac{du}{dt}\right) + u^2t^2 = ut^2.$$

Reorganizando

$$\frac{du}{dt} = \frac{-u^2}{t}.$$

Para resolver esta última ecuación observamos que es separable y la rescribimos en la forma

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{dt}{t}.$$

Integrando ambos lados

$$-\frac{1}{u} = -\log t + c_1 \text{ o bien } \frac{1}{u} + c_1 = \log t.$$

Exponenciado

$$e^{\frac{1}{u}+c_1} = t.$$

Ahora usamos que $u = y/t$ para obtener

$$e^{t/y}e^{c_1} = t.$$

Definimos $c :=\mathrm{e}^{-c_1}$ de manera que

$$e^{t/y} = e^{-c_1}t = ct.$$

*Observación*: La solución $e^{t/y} = e^{-c_1}t = ct$ es una forma de escribir la solución pero no la única. La sustitución $c :=\mathrm{e}^{-c_1}$ se realiza para simplificar la respuesta final. Tambien sería válido escribir $e^{t/y}e^{c_1} = t$ como solución de la ecuación diferencial dada, sin embargo esta última opción no estaba entre la opciones dadas. Adicionamente la solución tambien puede ser escrita en la forma $e^{t/y} = -ct$, ya $c$ es un parámetro indeterminado.

3. (Vale el 25% de la nota) Qué ecuación diferencial satisface la familia de curvas $y = Ce^{-x}$?

   (a) $yy' = 0$
   (b) $y' + y = 0$
   (c) $y'' - y = 0$

Solución: Remplazando $y = Ce^{-x}$ en cada una de las ecuaciones diferenciales dadas obtenemos,

   a. $yy' = (Ce^{-x})(-Ce^{-x}) = -C^2e^{-2x} = 0$, lo cual es falso.
   b. $y' + y = -Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0$, por lo tanto en este caso se satisface la ecuación.
   c. $y'' - y = Ce^{-x} - Ce^{-x} = 0$, por lo tanto en este caso se satisface la ecuación.

4. (Vale el 25% de la nota) Cuál de las funciones siguientes

   (a) $\mu = \ln(P(x))$
   (b) $\mu = P(x)$
   (c) $\mu = \exp\left(\int P(x)dx\right)$

   es un factor integrante de una ecuación de la forma

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0?$$

Solución: Multiplicando por $\mu = \exp\left(\int P(x)dx\right)$ la ecuación diferencial dada se obtiene

$$(P(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)y - Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right))dx + \exp\left(\int P(x)dx\right)dy = 0,$$

la cual satisface el criterio de exactitud, es decir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)y - Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\exp\left(\int P(x)dx\right).$$

En consecuencia $\mu = \exp\left(\int P(x)dx\right)$ es un factor integrante. Las opciones a y b se descartan ya que no verifican el criterio de exactitud.