# UNIVERSIDAD DEL NORTE
## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
**Parcial 1.**

Fecha de realización: **20-02-2019**

Nombre: ______________________________ Nota: __________

### I. SELECCIÒN MULTIPLE

En las preguntas 1 a 4 encierre en un círculo la letra correspondiente a la respuesta correcta. Cada pregunta tiene un valor de 10 %.

1. Las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial dada, es:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \quad a, b \text{ constantes}$$

   a) $P(t) = a$ y $P(t) = a/2b$
   b) $P(t) = 0$ y $P(t) = a/b$
   c) $P(t) = a/b$ y $P(t) = a/2b$
   d) Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales es separable y lineal?

   a) $y' + 5y = x$
   b) $y' + 5y = 0$
   c) $y' + 5y^2 = x$
   d) $y' + 5y^2 = 0$

3. El valor de $m$, para que $y = x^m$ con $x > 0$ sea solución de la ecuación diferencial dada, es

$$xy' + 2y = 0$$

   a) $m = 2$
   b) $m = 0$
   c) $m = -2$
   d) $m = 1$

4. La sustitución $v = y/x$ transforma la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} - e^{y/x}$$

   en:

   a) $v' - v + e^v = 0$
   b) $v' - v + \frac{e^v}{x} = 0$
   c) $v' - v + e^v = 0$
   d) $v' + \frac{e^v}{x} = 0$

### II. SOLUCIÓN CON PROCEDIMIENTO

Resuelva los tres ejercicios siguientes mostrando paso a paso la solución. Cada pregunta tiene un valor de 20 %.

5. Probar que si $a$ y $\lambda$ son constantes positivas, y $b$ es un número real, entonces toda solución de la ecuación

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

   tiene la propiedad que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

6. Considere el P.V.I.:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \ln(y^2 - x + 1) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

   a) Determine la región en el plano $xy$ donde el P.V.I. tiene solución única.
   b) ¿El teorema de existencia y unicidad garantiza solución única para los puntos $(x_0, y_0) = (4, 1)$ y $(x_0, y_0) = (1, 4)$?

7. Halle la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2 \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

⑤ $y'+ay=be^{-\lambda t}$

Solución:

el factor integrante $u(t)=e^{\int p(t)dt}=e^{\int a\,dt}=e^{at}$

luego la solución de la E.D. es

$$y(t)=\frac{\int u(t)\cdot g(t)dt+c}{u(t)}=\frac{\int e^{at}(be^{-\lambda t})dt+c}{e^{at}}$$

$$y(t)=\frac{b\int e^{(a-\lambda)t}dt+c}{e^{at}}=\frac{\frac{b}{a-\lambda}e^{(a-\lambda)t}+c}{e^{at}}$$

$$y(t)=\frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda t}+ce^{-at}$$ Para tod $t\in\mathbb{R}$.

Ahora bien:

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda t}+ce^{-at}=\frac{b}{(a-\lambda)}(0)+c(0)=0.$$

⑥ $\frac{dy}{dx}=\ln(y^2-x+1)$

Sol:

a) Sea $f(x,y)=\ln(y^2-x+1)$ donde $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y^2-x+1>0\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y^2+1>x\}$

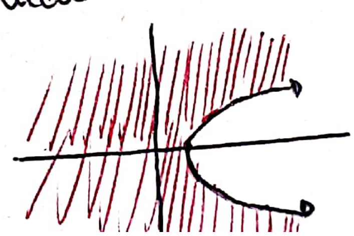
es facil ver que $f$ es continua en $D_f$.

Ahora $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{y^2-x+1}$ con $D_{f_y}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y^2-x+1\neq 0\}$

luego $f_y$ es continua en $D_{f_y}$ !!.

la región en el plano $xy$ donde el P.V.I tiene solución única en

$R=D_f\cap D_{f_y}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y^2+1>x\}$



b) el T.E.U. garantiza la sln única para

$(x_0, y_0) = (4,1)$ la respuesta es no, puesto que $(4,1) \notin R$

$(x_0, y_0) = (1,4)$ la respuesta es si, puesto que $(1,4) \in R$.

7) $\begin{cases} y' - y = e^x y^2 & (1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

solución:

la E.D. (1) es una E.D. de Bernoulli. Realizando la sustitución $u = y^{-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$. Entonces, Multiplicando a (1) por $-y^{-2}$:

$-y^{-2}y' + y^{-1} = -e^x \Rightarrow u' + u = -e^x$

el F.I. es $v(x) = e^{\int dx} = e^x$ ∧ $u(x) = \dfrac{\int e^x(-e^x dx) + C}{e^x}$

$$u(x) = \frac{-\int e^{2x}dx + c}{e^x} = \frac{-\frac{1}{2}e^{2x} + c}{e^x} = -\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$$

por la C.I. y $u = y^{-1}$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^x + ce^{-x} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}e^0 + ce^{-0} \Rightarrow c = 1$$

la solución es $y(x) = \dfrac{e^x}{-\frac{1}{2}e^{2x} + 1} = \dfrac{2e^x}{-e^{2x} + 2}$