Solución Final A

1. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+2s+10}\right\}$

Solución: $$\frac{s+4}{s^2+2s+10} = \frac{s+4}{(s^2+2s+1)+9} = \frac{(s+1)+3}{(s+1)^2+3^2}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

Por tanto,
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+2s+10}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}$$

$$= e^{-t}\cos(3t) + e^{-t}\operatorname{sen}(3t).$$

Descomposición de la fracción: 0.5 pts

Aplicación del primer teo. de tras.: 0.5 pts.

2a) Evalúe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$. (2)

Solución:

$$f(t) = 1 + [-1-1]\,u(t-1) = 1 - 2u(t-1)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}}$$

2b) Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$.

Solución:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+Bs}{s(s+1)}$$

$$1 = (A+B)s + A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$A+B=0$

$B=-A$

$\boxed{B=-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 1 - e^{-t}$$

2c) Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s+1}e^{-s}\right\}$$

$$= u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1) = \left[1 - e^{-(t-1)}\right]u(t-1).$$

2 d) Respuesta

$$y' + y = f(t) \quad , \quad y(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$sY(s) - \cancel{y(0)}^{0} + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}$$

$$(s+1)\,Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{2}{s(s+1)}e^{-s}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} - 2\left[1 - e^{-(t-1)}\right]\mathcal{U}(t-1).$$

- Toma la transf. de Laplace y despeja $Y(s)$: 0.5 pts

- Toma la transf. inversa: 0.5 pts.

3. $\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

Solución:

$$sY(s) - \overset{0}{y(0)} + 6Y(s) + 9\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) + 6sY(s) + 9Y(s) = 1$$

$$(s^2 + 6s + 9)\,Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s \to s+3}$$

$$\boxed{y(t) = t e^{-3t}}$$

- Toma correctamente la transf de Laplace y despeja $Y(s)$: 0.5 pts 0.5 pts

- Aplica el primer Teo. de Traslación y encuentra $y(t)$: 0.5 pts