# Solución P2A-2018-2

1. $$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \frac{\cos x}{x^3} y^{-2}.$$

Solución:
$$y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^3 = \frac{\cos x}{x^3}$$

Sea $z = y^3$. Entonces $\frac{dz}{dx} = 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$. Así $y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \frac{dz}{dx}$.

Sustituyendo estas expresiones en la ED:

$$\frac{1}{3} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} z = \frac{\cos x}{x^3}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x} z = 3 \frac{\cos x}{x^3} \qquad (\text{lineal})$$

factor integrante: $\mu = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3.$

Multiplicando la ecuación anterior por $\mu = x^3$:

$$x^3 \frac{dz}{dx} + 3x^2 z = 3 \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^3 z\right] = 3 \cos x$$

$$x^3 z = 3 \int \cos x \, dx$$

$$x^3 z = 3 \operatorname{sen} x + C$$

$$z = \frac{3 \operatorname{sen} x + C}{x^3}$$

$$y^3 = \frac{3 \operatorname{sen} x + C}{x^3}$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt[3]{3 \operatorname{sen} x + C}}{x}}$$

2. $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$. Sean $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ y $y_3 = \operatorname{sen} x$.

a) • Veamos que el conjunto es linealmente independiente en $I$.

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 1\ (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 \cdot 1$$

$W(y_1, y_2, y_3) = 1 \neq 0$ en $I$.

Puesto que el Wronskiano es diferente de cero, entonces el conjunto es linealmente independiente en $I$

• Veamos que $y_1, y_2$ y $y_3$ son soluciones de la ecuación en $I$.

$y_1 = 1$ $\qquad 0 + 0 = 0$

$y_1' = 0$

$y_1'' = 0$

$y_1''' = 0$

$y_2 = \cos x$

$y_2' = -\operatorname{sen} x$ $\qquad \operatorname{sen} x + (-\operatorname{sen} x) = 0$

$y_2'' = -\cos x$

$y_2''' = \operatorname{sen} x$

$y_3 = \operatorname{sen} x$

$y_3' = \cos x$ $\qquad (-\cos x) + \cos x = 0$

$y_3'' = -\operatorname{sen} x$

$y_3''' = -\cos x$

b) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$.

3. Datos $V_0 = 100$ litros $\quad$ $X(t)$: Cantidad de sal en el tiempo $t$.

$X(0) = 20$ kg.

$C_e = 1$ kg/lit

$r_e = 7$ lit/min

$r_s = 8$ lit/min.

a) • $V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t$

$V(t) = 100 + (7-8)t$ ; $\boxed{V(t) = 100 - t}$

• $V(20) = 100 - 20 = 80$. Hay 80 litros en ese instante.

b) El tanque está vacío cuando $V(t) = 0$, esto es;

$100 - t = 0$

$\boxed{t = 100}$

El ~~stanque~~ ~~estará~~ tanque estará vacío cuando pasen 100 minutos.

c) $C_s(t) = \dfrac{X(t)}{V(t)}$

$$\boxed{C_s(t) = \frac{X(t)}{100-t}}$$

d) $\dfrac{dx}{dt} = r_e C_e - r_s C_s$

$$\frac{dx}{dt} = 7 - 8 \cdot \frac{x}{100-t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{8}{100-t} \cdot x = 7 \\ \\ X(0) = 20 \end{cases}$$