Parcial 1A-2018-2

Solución

1.
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \ln(y - x^2 - 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) En este caso $f(x,y) = \ln(y - x^2 - 1)$.

f es continua en la región $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 - 1 > 0\}$.

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y - x^2 - 1} \cdot 1 = \frac{1}{y - x^2 - 1}.$$

Así $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 - 1 \neq 0\}$.

Por tanto el TEU garantiza solución única en

$$R = R_1 \cap R_2 = R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 - 1 > 0\}.$$

b) • Para $(x_0, y_0) = (1,3)$: $3 - 1^2 - 1 = 3 - 2 = 1 > 0$.

Por lo tanto el TEU garantiza solución única para este PVI.

• Para $(x_0, y_0) = (2,2)$: $2 - 2^2 - 1 = 2 - 5 = -3 < 0$.

Por lo tanto el TEU NO garantiza solución única para este PVI.

2. $(2xy + 2y^3)\,dx + (3x^2 + 10xy^2)\,dy = 0$

a) $M_y = 2x + 6y^2$, $N_x = 6x + 10y^2$.

$M_y \neq N_x$. Por tanto, la ED no es exacta.

b) $M_y - N_x = \underline{2x} + 6y^2 - \underline{6x} - 10y^2 = -4x - 4y^2 = -4(x+y^2)$

$$-\frac{M_y - N_x}{M} = -\frac{-4(x+y^2)}{2xy+2y^3} = \frac{4\cancel{(x+y^2)}}{2y\cancel{(x+y^2)}} = \frac{2}{y} \quad \text{(dep. únicamente de } y)$$

$$\mu = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{M}dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

Se sigue que el factor integrante está dado por

$$\boxed{\mu = y^2}$$

Multiplicando la ED. por este factor integrante:

$$\underbrace{(2xy^3 + 2y^5)}_{\overline{M}}dx + \underbrace{(3x^2y^2 + 10xy^4)}_{\overline{N}}dy = 0.$$

$$\overline{M}_y = 6xy^2 + 10y^4 \qquad \overline{N}_x = 6xy^2 + 10y^4$$

Puesto que $\overline{M}_y = \overline{N}_x$, entonces se concluye que la ED. equivalente es exacta.

c) Hallemos la solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 2y^5 \quad (1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 10xy^4 \quad (2)$$

Integrando con respecto a x en (1):

$$\boxed{f(x,y) = x^2y^3 + 2xy^5 + g(y).} \quad (3)$$

Derivando con respecto a y en (3):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 10xy^4 + g'(y) \quad (4)$$

Igualando (4) con (2):

$$3x^2y^2 + 10xy^4 + g'(y) = 3x^2y^2 + 10xy^4$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = K \quad . \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3):

$$f(x,y) = x^2y^3 + 2xy^5 + K$$

Por tanto la solución está dada por

$$\boxed{x^2y^3 + 2xy^5 = C}$$

3. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0$, $y(1) = e$.

Sea $y = vx$. Entonces $dy = v\,dx + x\,dv$.

Ahora, la ED se puede reescribir como:

$$y\,dx + x\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right]dy = 0 .$$

Sustituyendo, obtenemos que:

$$vx\,dx + x\left[\ln\left(\frac{x}{vx}\right) - 1\right](v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$vx\,dx + x\left(\ln\left(\frac{1}{v}\right) - 1\right)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

Dividiendo por x:

$$v\,dx + (\cancel{\ln 1}^{0} - \ln v - 1)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$v\,dx - (1 + \ln v)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$[v - (1 + \ln v)\cdot v]\,dx - x(1 + \ln v)\,dv = 0$$

$$(\cancel{v} - \cancel{v} - v\ln v)\,dx - x(1 + \ln v)\,dv = 0$$

$$-v\ln v\,dx - x(1 + \ln v)\,dv = 0$$

$$x(1 + \ln v)\,dv = -v\ln v\,dx$$

ó Separando variables

$$\int \frac{1+\ln v}{v \ln v}\, dv = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{v \ln v}\, dv + \int \frac{1}{v}\, dv = - \int \frac{dx}{x}$$

$t = \ln v$

$dt = \frac{1}{v} dv$

$$\int \frac{dt}{t} + \int \frac{1}{v}\, dv = - \int \frac{1}{x} dx .$$

$$\ln(\ln v) + \ln(v) = - \ln x + C$$

$$\ln\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = - \ln x + C$$

Ahora cuando $x = 1$, $y = e$:

$$\ln(\underbrace{\ln(e)}_{1}) + \ln(e) = - \ln(1) + C$$

$$0 + 1 = C \,, \quad \boxed{C = 1} .$$

Luego la solución está dada por

$$\ln\left[\ln\left(y/x\right)\right] + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = - \ln x + 1$$

ó

$$\ln\left[\ln\left(y/x\right)\right] + \ln\left(y/x\right) + \ln x - 1 = 0 .$$