Parcial 1B - 2018 - 2

Solución

1. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \ln(x - y^2 - 1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) En este caso, $f(x,y) = \ln(x - y^2 - 1)$.

f es continua en la región $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 - 1 > 0\}$.

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x - y^2 - 1} \cdot (-2y) = \frac{-2y}{x - y^2 - 1}.$$

Así $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 - 1 \neq 0\}$.

Por tanto el TEU garantiza solución única en

$$R = R_1 \cap R_2 = R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 - 1 > 0\}.$$

b) • Para $(x_0, y_0) = (1, 2)$: $1 - 2^2 - 1 = -4 < 0$.

Por tanto el TEU no garantiza solución única para este PVI.

• Para $(x_0, y_0) = (6, 2)$: $6 - 2^2 - 1 = 1 > 0$.

Por tanto el TEU garantiza solución única para este PVI.

2. $(2y+3xy^2)\,dx + (x+2x^2y)\,dy = 0$

a) $M_y = 2 + 6xy \qquad N_x = 1 + 4xy$

Como $M_y \neq N_x$, entonces podemos concluir que la ED. no es exacta.

b) $M_y - N_x = 2 + 6xy - 1 - 4xy = 1 + 2xy$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1+2xy}{x+2x^2y} = \frac{\cancel{1+2xy}}{x\,\cancel{(1+2xy)}} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

Se sigue que el factor integrante está dado por

$$\boxed{\mu = x}$$

Multiplicando la ED. por el factor integrante:

$$\underbrace{(2xy+3x^2y^2)}_{\bar{M}}\,dx + \underbrace{(x^2+2x^3y)}_{\bar{N}}\,dy = 0$$

$$\bar{M}_y = 2x + 6x^2y \qquad \bar{N}_x = 2x + 6x^2y$$

Como $\bar{M}_y = \bar{N}_x$, entonces la ED. equivalente es exacta.

c) Hallemos la solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3x^2y^2 \quad 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x^3y \quad 2$$

Integrando con respecto a x en 1:

$$f(x,y) = x^2y + x^3y^2 + g(y) \quad 3$$

Derivando con respecto a y en 3:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x^3y + g'(y) \quad 4$$

Igualando 4 con 2:

$$x^2 + 2x^3y + g'(y) = x^2 + 2x^3y$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = K \quad 5$$

Sustituyendo 5 en 3:

$$f(x,y) = x^2y + x^3y^2 + \cancel{K}$$

Por tanto la solución está dada por

$$x^2y + x^3y^2 = C.$$

3. $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

Sea $y = vx$. Entonces $dy = v\,dx + x\,dv$. Sustituyendo

$$(x + vxe^{vx/x})dx - xe^{vx/x}(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(x + vxe^{v})dx - xe^{v}(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$[(x + \cancel{vxe^{v}}) - \cancel{vxe^{v}}]dx - x^2e^{v}dv = 0$$

$$x\,dx - x^2e^{v}dv = 0$$

$$dx - xe^{v}dv = 0$$

$$dx = xe^{v}dv$$

$$\int e^{v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$e^{v} = \ln|x| + C$$

$$e^{y/x} = \ln|x| + C$$

Cuando $x = 1, y = 0$: $e^{0/1} = \ln|1| + C$; $\boxed{C = 1}$

$$e^{y/x} = \ln|x| + 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln(\ln|x| + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x\ln(\ln|x| + 1)}$$