1

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{16x^2-9y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

a) $f(x,y) = \sqrt{16x^2-9y^2}$ es continua en $D_1 = \{(x,y) : 16x^2-9y^2 \geq 0\}$ (0.2)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-9y}{\sqrt{16x^2-9y^2}}$$ es continua en $D_2 = \{(x,y) : 16x^2-9y^2 > 0\}$ (0.2)

$R = D_1 \cap D_2 = \{(x,y) : 16x^2-9y^2 > 0\}$. (0.1)

Por tanto el TEU garantiza solución única al PVI para todos $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tales que $16x_0^2 - 9y_0^2 > 0$. (0.1)

b) • Para $(2,2)$: $16(2)^2 - 9(2)^2 > 0$ por tanto $(2,2) \in R$ y en consecuencia el TEU garantiza solución única al PVI correspondiente. (0.2)

• Para $(1,3)$: $16(1)^2 - 9(3)^2 < 0$ por tanto $(1,3) \notin R$ y en consecuencia el TEU no garantiza solución única al PVI correspondiente. (0.2)

3. Resuelva el PVI:

Reconoce que es Bernoulli (0.2)

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 5y^3 \quad , \quad y(1) = 1.$$

Estandariza: (0.4)
(normaliza)

Hace la sustitución correctamente: (0.2)

Solución:
$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{5}{x^2} y^3$$

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y^{-2} = \frac{5}{x^2} \qquad (*)$$

Halla el diferencial con resp. a x: (0.2)

Sea $v = y^{-2}$. Entonces $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx}$. Luego $y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$.

sustituyendo en $(*)$ obtenemos

Reduce a una ED lineal: (0.2)

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = \frac{5}{x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x} v = -\frac{10}{x^2} \qquad (**)$$

$\mu = e^{\int(-4/x)dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$. Multiplicando $(**)$ por $\mu = x^{-4}$ obtenemos que

Resuelve correctamente la ED lineal resultante (0.6) y da la solución general

$$x^{-4}\frac{dv}{dx} - 4x^{-5} v = -10x^{-6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4} \cdot v\right] = -10x^{-6}$$

$$x^{-4} \cdot v = -10\int x^{-6}dx = 2x^{-5} + C$$

$$y^{-2} = v = 2x^{-1} + Cx^4$$

Halla la constante (0.1)

Cuando $x=1, y=1$: $1 = 2 + C$; $\boxed{C = -1}$

$$y^{-2} = 2x^{-1} - x^4 = \frac{2}{x} - x^4 = \frac{2 - x^5}{x}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{x}{2 - x^5}}$$

Da la respuesta correctamente (0.1).
(halla la particular)

2. $(x^3+y^3)\,dx - xy^2\,dy = 0$

Solución: Homogénea. Sea $y = ux$. Entonces $dy = u\,dx + x\,du$. Sustituyendo

$$(x^3+u^3x^3)\,dx - x^3u^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(x^3+u^3x^3)\,dx - x^3u^3\,dx - x^4u^2\,du = 0$$

$$(x^3+u^3\cancel{x^3} - x^3\cancel{u^3})\,dx - x^4u^2\,du = 0$$

$$x^3\,dx - x^4u^2\,du = 0$$

$$dx - x\,u^2\,du = 0$$

$$u^2\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^3}{3} = \ln|x| + C_1$$

$$\frac{y^3}{x^3} = 3\ln|x| + C$$

$$y^3 = x^3(\ln|x|^3 + C)$$

$$\boxed{y = x\sqrt[3]{\ln|x|^3 + C}}$$

- Reconoce que es homogénea: (0.5)
- Hace la sustitución correctamente: (0.3)
- Halla el diferencial correctamente (0.2)
- Reduce la ED a separable correctamente (0.6)
- Separa (0.1)
- Resuelve las integrales correctamente (0.2)
- Sustituye y da la respuesta final (0.1)