

Parcial 1A

1.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{y-x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a) $f(x, y) = \sqrt{y-x}$ es continua en $D_1 := \{(x, y) : y-x \geq 0\}$ (0.2)

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$ es continua en $D_2 := \{(x, y) : y-x > 0\}$ (0.2)

Por lo tanto $R = D_1 \cap D_2 = D_2 = \{(x, y) : y-x > 0\}$. (0.2)

b) Para $(-2, -1)$: $-1 - (-2) = -1 + 2 = 1 > 0$. (0.2)
 x_0, y_0

En este caso el TEU garantiza solución única para el PVI

Para $(1, -3)$: $-3 - 1 = -4 < 0$.
 x_0, y_0

En este caso el TEU NO garantiza solución única para el PVI (0.2)

Parcial 1A

$$2. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(2-y)(4-y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

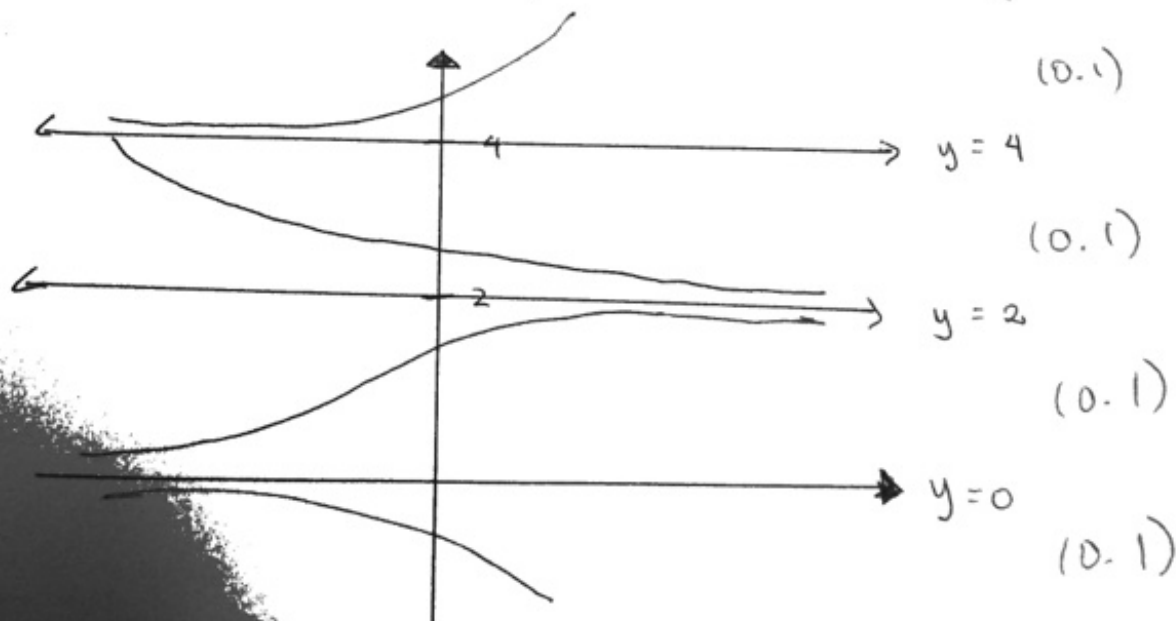
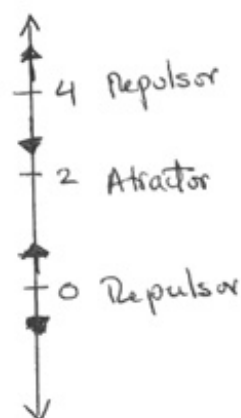
a) Soluciones de equilibrio :

$$f(y) = y(2-y)(4-y) = 0$$

Cuando $\boxed{y=0}$, $\boxed{y=2}$ y $\boxed{y=4}$. (0.1 por c/u).

b) Tabla (0.3)

Intervalo	signo de $f(y)$	Comportamiento de y
$(-\infty, 0)$	-	Disminuye
$(0, 2)$	+	crece
$(2, 4)$	-	disminuye
$(4, \infty)$	+	crece



3. $(y^2 + xy)dx + x^2 dy = 0$. (1)

Solución: Homogénea de grado dos. Sea

$y = ux$, entonces $dy = u dx + x du$. (0.2)

Sustituyendo en (1):

$$\left. \begin{aligned} (u^2 x^2 + u x^2) dx + x^2 (u dx + x du) &= 0 \\ (u^2 x^2 + u x^2 + x^2 u) dx + x^3 du &= 0 \\ (u^2 x^2 + 2u x^2) dx + x^3 du &= 0 \\ (u^2 + 2u) dx + x^3 du &= 0 \end{aligned} \right\} (0.4)$$

$\int \frac{du}{u(u+2)} = - \int \frac{dx}{x}$ (0.1)

Ahora,

$\frac{1}{u(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} = \frac{A(u+2) + Bu}{u(u+2)} = \frac{(A+B)u + 2A}{u(u+2)}$

de donde $2A = 1$, $A+B = 0$. Esto es, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ (0.4)

Luego $\frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+2} \right)$

$\frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+2} du \right] = - \int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2} \ln |u| - \ln |u+2| = - \ln |x| + C_1$

$\ln \left| \frac{u}{u+2} \right| = -2 \ln |x| + C_1 = \ln |x|^{-2} + C_1$

$\frac{u}{u+2} = C x^{-2}$

$\frac{y}{y+2x} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 2} = C x^{-2} = \frac{C}{x^2}$

$y = \frac{C}{x^2} (y+2x) = \frac{C}{x^2} y + 2 \frac{C}{x}$

$y \left(1 - \frac{C}{x^2} \right) = 2 \frac{C}{x}$; $y = \frac{2 \frac{C}{x}}{1 - \frac{C}{x^2}}$; $y = \frac{2Cx}{x^2 - C}$

Parcial 1A

4. $\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$, $y(0) = 2$. (1)

Solución: Bernoulli con $n=2$. Multiplicando por y^{-2} en ambos lados de la eq. (1)

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - y^{-1} = e^x. \quad (2) \quad (0.1)$$

Sea $v = y^{-1}$. Entonces $\frac{dv}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$ o $y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$. (0.2)

Sustituyendo en (2):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dv}{dx} - v &= e^x \\ \text{(lineal)} \quad \frac{dv}{dx} + v &= -e^x \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad (0.2)$$

Factor integrante: $\mu = \int 1 \cdot dx = e^x$. Multiplicando en ambos lados

de (3) por e^x :

$$e^x \frac{dv}{dx} + e^x v = -e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx} [e^x \cdot v] = -e^{2x}$$

$$e^x \cdot v = -\int e^{2x} dx = -\frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$y^{-1} = v = -\frac{1}{2} e^x + C e^{-x} \quad (4)$$

sustituyendo $x=0$, $y=2$ en (4):

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C \quad ; \quad \text{de donde } \boxed{C=1} \quad (0.2)$$

$$y^{-1} = -\frac{1}{2} e^x + e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{e^{-x} - \frac{1}{2} e^x}$$

$$\boxed{y = \frac{2}{2e^{-x} - e^x}}$$

(0.2)