Solución P2A

1. a) V Los coeficientes son continuos en $(-1,1)$ y $a_2(x) = x+1 \neq 0$ para todo $x \in (-1,1)$.

b) F $p(x) = \frac{1}{x}$. La fórmula de reducción de orden establece que

$$y_2 = \ln x \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{(\ln x)^2}\,dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{\ln x}\right) = -1$$

c) F Toda EDLH de orden n tiene exactamente $\underline{\underline{n}}$ soluciones, en este caso cuatro soluciones.

d) F $y_p = 3x^2-5$, $y_p' = 6x$, $y_p'' = 6$. Sustituyendo

$$6 + 4(3x^2-5) = 12x^2 - 14$$

2. a) $M_y = x \neq N_x = 4x$ ¡no es exacta! (0.2) por cada derivada.

b) $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}$ (0.2)

$$\mu = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{\ln y^3} = y^3, \quad \boxed{\mu = y^3} \quad (0.2)$$

$$xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0$$

$\overline{M}_y = 4xy^3 = \overline{N}_x$. ¡Exacta!

c) $f_x = xy^4$ (1) (0.1) $\qquad f_y = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$ (2) (0.1)

$f(x,y) = \int xy^4\,dx$

$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + g(y)$ (3) (0.1)

$f_y = 2x^2y^3 + g'(y)$ (4)

Igualando (4) con (2): $g'(y) = 3y^5 - 20y^3$ (0.1)

$\boxed{g(y) = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4}$ (5) (0.1)

Sustituyendo (5) en (3): $f(x,y) = \boxed{\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = K}$ (0.1)

Parcial 2A

4) a) Para $0 \leq t \leq 10$, sea $x(t)$: Cant. de sal (en lb).

$x(0) = x_0 = 20$ lb

$c_0 = 1$ lb/gal

De aquí $V_0 = \frac{x_0}{c_0} = \frac{20}{1} = 20$; $\boxed{V_0 = 20 \text{ gal}}$ (0.2)

$r_e = 1$ gal/min $c_e = 0$ lb/gal

$r_s = 2$ gal/min

$V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t$

$\boxed{V(t) = 20 - t}$ $0 \leq t \leq 10$ (0.2)

$$\frac{dx}{dt} = (1)(0) - 2 \cdot \frac{x(t)}{20-t}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{20-t}x \\ x(0) = 20 \end{cases} \quad (0.2)$$

b) Para $t \geq 10$, sea $y(t)$: Cant. de sal (en lb).

- Volumen inicial de este proceso = Volumen final del proceso anterior.

$V_0 = 20 - 10 = 10$, $\boxed{V_0 = 10}$ (0.1)

- La cant. inicial de sal en este proceso = cant. final de sal en el proc. ant.

$y(0) = x(10)$. (0.1)

$r_e = 4$ gal/min $c_e = 0.5$ lb/gal $r_s = 2$ gal/min

$V(t) = 10 + (4-2)(t-10) = 10 + 2(t-10) = 10 + 2t - 20$

$\boxed{V(t) = 2t - 10}$ (0.1)

$$\frac{dy}{dt} = (4)(0.5) - 2\frac{y}{2t-10} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-5}y = 2 \\ y(0) = x(10) \end{cases} \quad (0.1).$$

$y(0) = x(10)$

3. i) Veamos que $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ son soluciones de la ED.

y_1. $y_1 = e^x$, $y_1' = e^x$, $y_1'' = e^x$, $y_1''' = e^x$ (0.2)

$$e^x - 6e^x + 11e^x - 6e^x = 0$$

y_2: $y_2 = e^{2x}$, $y_2' = 2e^{2x}$, $y_2'' = 4e^{2x}$, $y_3''' = 8e^{2x}$ (0.2)

$$8e^{2x} - 6(4e^{2x}) + 11(2e^{2x}) - 6e^{2x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$= 8e^{2x} - 24e^{2x} + 22e^{2x} - 6e^{2x} = 0$$

y_3 $y_3 = e^{3x}$, $y_3' = 3e^{3x}$, $y_3'' = 9e^{3x}$, $y_4''' = 27e^{3x}$ (0.2)

$$27e^{3x} - 6(9e^{3x}) + 11(3e^{3x}) - 6(e^{3x}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$27e^{3x} - 54e^{3x} + 33e^{3x} - 6e^{3x} = 0.$$

Por tanto $\{y_1, y_2, y_3\}$ son soluciones de la ED. (0.1)

ii) Veamos que $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ es linealmente independiente.

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

Por tanto $\{y_1, y_2, y_3\}$ es un cjto linealmente independiente. (0.1)

(0.7) por cada inciso.