Solución Parcial 1A - 2019 - 1

1. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2x^2 - y} \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

a) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 - y}$ es continua en $D_1 = \{(x,y) : 2x^2 - y \geq 0\}$ (0.2

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2x^2 - y}}$ es continua en $D_2 = \{(x,y) : 2x^2 - y > 0\}$ (0.2

Sea $R = D_1 \cap D_2 = D_2 = \{(x,y) : 2x^2 - y > 0\}$. (0.1)

El TEU garantiza solución única al PVI para todos los puntos $(x_0, y_0) \in R$, esto es, $2x_0^2 - y_0 > 0$. (0.1)

b) • $(x_0, y_0) = (2,2)$: $2(2)^2 - 2 = 6 > 0$. Por tanto el TEU garantiza solución única al PVI con condición inicial $y(2) = 2$. (0.2)

• $(x_0, y_0) = (1,3)$: $2(1)^2 - 3 = -1 < 0$. Por tanto el TEU garantiza solución única al PVI con condición inicial $y(1) = 3$. (0.2).

2. $(y^2 + 2xy)\,dx - 2x^2\,dy = 0.$

Sol Homogénea pues M y N son de grado 3. Sea $y = vx$. Entonces $dy = v\,dx + x\,dv$ Sustituyendo en la ED:

$$\left[(vx)^2 + 2x(vx)\right]dx - 2x^2\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(v^2x^2 + 2x^2v)\,dx - 2x^2v\,dx - 2x^3\,dv = 0$$

$$(v^2x^2 + 2\cancel{x^2}v - 2\cancel{x^2}v)\,dx - 2x^3\,dv = 0$$

$$\frac{1}{x^2} \qquad v^2x^2\,dx - 2x^3\,dv = 0 \qquad \frac{1}{x^2}$$

$$v^2\,dx - 2x\,dv = 0$$

$$v^2\,dx = 2x\,dv$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$-\frac{1}{v} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

pero $v = y/x$,

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\ln|x| + C}$$

$$\boxed{y = -\frac{x}{\frac{1}{2}\ln|x| + C}}$$

- Reconoce que es homogénea, hace la sustitución correctamente y halla el diferencial (0.8).
- Reduce a separable (0.5)
- Resuelve las integrales (0.4)
- Sustituye y da la resp. final (0.2

3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{5x}{y^2}$, $y(1) = 1$

Sol Bernoulli con $n = -2$. Multiplicando por y^2 en ambos lados de la ED:

$$y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^3 = 5x .$$

Sea $z = y^3$. Entonces $\dfrac{dz}{dx} = 3y^2 \cdot \dfrac{dy}{dx}$, de donde $y^2 \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3} \dfrac{dz}{dx}$.

Sustituyendo:

$$\frac{1}{3} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} z = 5x$$

(*) $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{3}{x} z = 15x$ (lineal en z con respecto a x).

$P(x) = \dfrac{3}{x}$. $\mu = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$. Mult. por $\mu = x^3$ en ambos lados de (*) ;

$$x^3 \frac{dz}{dx} + 3x^2 z = 15x^4$$

$$\frac{d}{dx} \left[x^3 \cdot z \right] = 15x^4$$

$$x^3 \cdot z = 15 \int x^4 dx$$

$$x^3 \cdot z = 3x^5 + C$$

$$z = 3x^2 + \frac{C}{x^3}$$

$$y^3 = 3x^2 + \frac{C}{x^3} .$$

- Reconoce que es Bernoulli, hace la sustitución correctamente y reduce a lineal (1.2)
- Resuelve correctamente la ecuación lineal resultante (0.6)
- Halla la constante C y escribe la solución exacta (0.2)

Cuando $x = 1, y = 1$: $1 = 3 + C \Rightarrow \boxed{C = -2}$

$$y^3 = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{3x^2 - \frac{2}{x^3}}}$$