Solución Parcial 2B 2018 1

(i)

1. $(2y^2+3x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

a) $M_y = 4y \neq 2y = N_x$ (0.3) cada elemento

b) $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{2y}{2xy} = \dfrac{1}{x}$ (0.2)

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x. \qquad \boxed{\mu = x} \quad (0.2)$$

$$\underbrace{(2xy^2+3x^2)}_{\bar{M}}\,dx + \underbrace{2x^2y}_{\bar{N}}\,dy = 0$$

$\bar{M}_y = 4xy = \bar{N}_x = 4xy$ ¡Exacta! (0.2)

c) $f_x = 2xy^2 + 3x^2$ ① $\qquad f_y = 2x^2y$ ② (0.1)

Integrando en ① con respecto a x:

$f(x,y) = x^2y^2 + x^3 + g(y)$. ③ (0.1)

Derivando en ③ con respecto a y:

$f_y = 2x^2y + g'(y)$ ④ (0.1)

Igualando ④ con ②:

$$2x^2y + g'(y) = 2x^2y$$
$$g'(y) = 0$$
$$\boxed{g(y) = C} \quad ⑤ \quad (0.1)$$

Sustituyendo ⑤ en ③: $f(x,y) = x^2y^2 + x^3 + C$ (0.1)

Solución: $\boxed{x^2y^2 + x^3 = K}$ (0.1)

2. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{3x}$, $y_3 = e^{4x}$

a)

y_1 es solución: $y_1 = e^x$, $y_1' = e^x$, $y_1'' = e^x$, $y_1''' = e^x$ (0.2)

$$e^x - 8e^x + 19e^x - 12e^x = 20e^x - 20e^x = 0$$

y_2 es solución: $y_2 = e^{3x}$, $y_2' = 3e^{3x}$, $y_2'' = 9e^{3x}$, $y_2''' = 27e^{3x}$ (0.2)

$$27e^{3x} - 8(9e^{3x}) + 19(3e^{3x}) - 12(e^{3x}) = 27e^{3x} - 72e^{3x} + 57e^{3x} - 12e^{3x} = 0$$

y_3 es solución: $y_3 = e^{4x}$, $y_3' = 4e^{4x}$, $y_3'' = 16e^{4x}$, $y_3''' = 64e^{4x}$ (0.2)

$$64e^{4x} - 8(16e^{4x}) + 19(4e^{4x}) - 12e^{4x} = 64e^{4x} - 128e^{4x} + 86e^{4x} - 12e^{4x} = 0$$

Veamos que $\{y_1, y_2, y_3\}$ es linealmente independiente.

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} & e^{4x} \\ e^x & 3e^{3x} & 4e^{4x} \\ e^x & 9e^{3x} & 16e^{4x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{3x} \cdot e^{4x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= e^{8x}\left[1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}\right]$$

$$= e^{8x}\left[12 - 12 + 6\right] = 6e^{8x} \neq 0$$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

(0.4)

Por tanto $\{y_1, y_2, y_3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones para $y''' - 8y'' + 19y' - 12y = 0$.

b) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{4x}$. (0.6)

3. $V_0 = 100$ gal. Sea $x(t)$: Cantidad de sal (en libras) en el tiempo t.

$X_0 = X(0) = 0$

$c_e = 1$ lib/gal

$r_e = 2$ gal/min (0.5)

$r_s = 1$ gal/min

El volumen en el tiempo t está dado por: $\boxed{V(t) = 100 + t}$ (0.3)

La concentración de salida está dada por: $\boxed{c(t) = \dfrac{x(t)}{100+t}}$ (0.3)

Luego

$$\frac{dx}{dt} = (2\ \text{gal/min})(1\ \text{lib/gal}) - (1.\ \text{gal/min})\left(\frac{x(t)}{100+t}\ .\ \text{lib/gal}\right).$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{100+t}x$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{100+t}x = 2 \\ X(0) = 0. \end{cases}$$ (0.5).