Solución Parcial 2B-2019-1

1. $(2y+3xy^2)\,dx + (x+2x^2y)\,dy = 0$

Solución:

a) $M_y = 2+6xy \neq N_x = 1+4xy$ (0.4 pts)

Por tanto la ED. no es exacta.

b) $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{1+2xy}{x+2x^2y} = \dfrac{1+\cancel{2xy}}{x(1+\cancel{2xy})} = \dfrac{1}{x}$ (0.4 pts).

factor integrante: $\mu = x$.

Multiplicando la ED por $\mu = x$:

$$\underbrace{(2xy+3x^2y^2)}_{\bar{M}}\,dx + \underbrace{(x^2+2x^3y)}_{\bar{N}}\,dy = 0.$$

$\bar{M}_y = 2x+6x^2y = \bar{N}_x = 2x+6x^2y$ (0.2 pts)

Por tanto la nueva ED. es exacta.

c) $f_x = M$ $\quad$ $f_y = N$

$f_x = 2xy + 3x^2y^2$ (1) $\quad$ $f_y = x^2 + 2x^3y$ (2)

Integrando con respecto a x en (1):

$f(x,y) = \int (2xy + 3x^2y^2)\,dx$ (0.2 pts)

$f(x,y) = x^2y + x^3y^2 + g(y)$ (3).

Derivando con respecto a y en (3):

$f_y = x^2 + 2x^3y + g'(y)$ (4) (0.2 pts)

Igualando (4) con (2):

$$\cancel{x^2 + 2x^3y} + g'(y) = \cancel{x^2 + 2x^3y}$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = 0 \quad (5)$$ (0.2 pts).

Sustituyendo (5) en (3):

$$f(x,y) = x^2y + x^3y^2.$$

(0.2 pts).

Así la solución está dada por:

$$x^2y + x^3y^2 = C.$$

2. $\{e^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \operatorname{sen} x$

$y_1' = -e^{-x}$, $y_2' = -\operatorname{sen} x$, $y_3' = \cos x$

$y_1'' = e^{-x}$ $y_2'' = -\cos x$, $y_3'' = -\operatorname{sen} x$

$y_1''' = -e^{-x}$ $y_2''' = \operatorname{sen} x$ $y_3''' = -\cos x$

Veamos que y_1 es solución de la ED. $y''' + y'' + y' + y = 0$ en $I = (-\infty, \infty)$.

$-e^{-x} + e^{-x} - e^{-x} + e^{-x} = 0$ ✓ (0.2 pts)

Veamos que y_2 es solución de la ED. $y''' + y'' + y' + y = 0$ en $I = (-\infty, \infty)$.

$\cancel{\operatorname{sen} x} - \cancel{\cos x} - \operatorname{sen} x + \cos x = 0$ ✓ (0.2 pts)

Veamos que y_3 es solución de la ED. $y''' + y'' + y' + y = 0$ en $I = (-\infty, \infty)$

$-\cancel{\cos x} - \cancel{\operatorname{sen} x} + \cancel{\cos x} + \operatorname{sen} x = 0$. ✓ (0.2 pts)

Por tanto $\{y_1, y_2, y_3\}$ es un conjunto de soluciones para la ED. dada.

Veamos que $\{e^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x\}$ es linealmente independiente en I.
En efecto,

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^{-x} & \cos x & \operatorname{sen} x \\ -e^{-x} & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ e^{-x} & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ -1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 1 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

$$= e^{-x}\left[1 \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} \right]$$

$$= e^{-x}\left[\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{(-\cos x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{sen} x)}_{0} + \underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_{1} \right]$$

(0.6 pts)

$= 2e^{-x} \neq 0$ para todo $x \in I = (-\infty, \infty)$.
Por tanto $\{y_1, y_2, y_3\}$ es un C.F.S. para la ED dada. (0.1 pts)

3. $Cap = 400$ litros

$V_0 = 200$ litros.

$C_0 = \frac{1}{5}\ kg/L$

$C_e = 1\ kg/L$ (0.5).

$r_e = 6\ L/min$

$r_s = 2\ L/min$.

3. Datos: $V_0 = 200\,L$ $\quad x_0 = ?$

$C_0 = \frac{1}{5}\frac{kg}{L}$ $\quad V(t) = ?$

$C_e = 1\frac{kg}{L}$ $\quad C_s = ?$ (0.5 pts)

$r_e = 6\frac{L}{min}$

$r_s = 2\frac{L}{min}$.

$Cap = 400\,L$

a) $x_0 = C_0 V_0 = \left(\frac{1}{5}\frac{kg}{L}\right)(200\,L) = 20\,kg$ (0.2 pts)

hay $x_0 = 20\,kg$ de sal inicialmente en el tanque.

b) $V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t$

$V(t) = 200 + (6-2)t$

$\boxed{V(t) = 200 + 4t}$

$V(10) = 200 + 4(10) = 200 + 40 = 240\,L$ (0.2 pts)

Después de 10 minutos hay 240 litros de la solución.

c) El tanque comienza a derramarse cuando $V(t) = 400$, esto es,

cuando $200 + 4t = 400$

$4t = 200$

$t = 50\,min.$ (0.2 pts).

A partir de los 50 minutos el tanque empieza a derramarse.

d) $C_s = \frac{x(t)}{V(t)} = \frac{x(t)}{200+4t}\frac{kg}{L} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = r_e C_e - r_s C_s = \left(6\frac{L}{min}\right)\left(1\frac{kg}{L}\right) - \left(2\frac{L}{min}\right)\left(\frac{x}{\underset{100+2t}{\cancel{200+4t}}}\frac{kg}{L}\right)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{100+2t}\cdot x = 6 \\ x(0) = 20 \end{cases}$$

(0.5 pts)