Solución Parcial 3B-2019-1

1 a) $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y''' + 18y'' + 20y' + 8y = 0$.

Solución:

Haciendo $y = e^{mx}$, la ecuación auxiliar nos queda:

$$m^5 + 4m^4 + 9m^3 + 18m^2 + 20m + 8 = 0$$

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

1	4	9	18	20	8	-1
	-1	-3	-6	-12	-8	
1	3	6	12	8	$\boxed{0}$	-1
	-1	-2	-4	-8		
1	2	4	8	$\boxed{0}$		-2
	-2	0	-8			
1	0	4	$\boxed{0}$			

$$m^5 + 4m^4 + 9m^3 + 18m^2 + 20m + 8 = (m+1)^2(m+2)(m^2+4) = 0$$

$m = -1$ mult. 2

$m = -2$

$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = 0 \pm 2i$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{-2x} + c_4 \cos 2x + c_5 \operatorname{Sen} 2x .$$

(0.2 pts) por cada raíz

(0.5 pts) por escribir la solución correctamente.

Solución:

1b) $g_1(x) = 10e^{-x}$ $\quad g_2(x) = -5e^{-2x}$ $\quad g_3(x) = \cos 2x$ $\quad g_4(x) = \operatorname{sen} x$.

$y_{p_1}(x) = Ax^2e^{-x}$ $\quad y_{p_2}(x) = Bxe^{-2x}$ $\quad y_{p_3}(x) = Cx\cos 2x + Dx\operatorname{sen} 2x$

$y_{p_4}(x) = E\cos x + F\operatorname{sen} x$. (0.2 pts) Por cada y_p correctamente escrita.

Por lo tanto $y_p(x) = Ax^2e^{-x} + Bxe^{-2x} + Cx\cos 2x + Dx\operatorname{sen} 2x$

$+ E\cos x + F\operatorname{sen} x$.

(0.2 pts) por escribir la forma de la solución particular.

2 a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Solución: Sea $y = x^m$. Ent. $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$.

Sustituyendo: $x^2\left[m(m-1)x^{m-2}\right] - 2x\left[mx^{m-1}\right] + 2x^m = 0$

$x^m\left[m(m-1) - 2m + 2\right] = 0$

$m^2 - 3m + 2 = 0$ — Hace la sustitución correctamente (0.2 pts)

$(m-2)(m-1) = 0$

$\boxed{m=2}$ $\boxed{m=1}$ — sustituye y encuentra las raíces. (0.6 pts)

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$

$\boxed{y(x) = c_1x + c_2x^2}$ — escribe la solución general de la ec. dif. correctamente. (0.2 pts)

Solución:

2b) Usamos variación de parámetros sabiendo que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = x^2$. Estandarizando la ecuación

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \underbrace{2x^2e^x}_{f(x)}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{W = x^2} \quad (0.2 \text{ pts})$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 2x^2e^x & 2x \end{vmatrix} = -2x^4e^x \Rightarrow \boxed{W_1 = -2x^4e^x} \quad (0.2 \text{ pts})$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x \Rightarrow \boxed{W_2 = 2x^3e^x} \quad (0.2 \text{ pts})$$

$$u_1 = -\int \frac{2x^4e^x}{x^2}dx = -2\int x^2e^x dx$$ (int. por partes dos veces).

$$\boxed{u_1 = -2e^x(x^2 - 2x + 2)} \quad (0.3 \text{ pts})$$

$$u_2 = \int \frac{2x^3e^x}{x^2}dx = 2\int xe^x dx$$

$$\boxed{u_2 = 2e^x(x-1)} \quad (0.3 \text{ pts})$$

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = -2xe^x(x^2 - 2x + 2) + 2x^2e^x(x-1) \quad (0.1 \text{ pts})$$

$$= 2e^x(-\cancel{x^3} + 2\underline{x^2} - 2x + \cancel{x^3} - \underline{x^2})$$

$$= 2e^x(x^2 - 2x)$$

$$\boxed{y_p(x) = 2x^2e^x - 4xe^x} \quad (0.2 \text{ pts}) \text{ (Simplificación).}$$