Taller de preparación para el examen final

Para cada una de las siguientes funciones.
a) Encuentre los intervalos en los que la función es creciente, decreciente y determine los valores de x en los cuales la función tiene un máximo o un mínimo.
b) Encuentre los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y determine los valores de x en los cuales la función tiene un punto de inflexión.
c) A Partir de la información obtenida en la parte **a)** y **b)** trace un bosquejo de la grafíca de la función

1. $y = x^3 - 3x^2$
2. $y = x^4 - 6x^2 + 5$
3. $y = 3x^5 - 5x^3$
4. $y = 8x^2 - x^4$
5. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$
6. $y = x^4 - 2x^3$
7. $y = 4x^3 - 3x^4 + 1$
8. $y = x^4 - 8x^2 + 8$

Resolver los siguientes problemas

1. La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c\,(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$$

   donde c es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad? ¿Cuál es este mínimo?

2. Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es

$$\overline{c}\,(q) = 0,2q + 4 + \frac{400}{q}$$

   donde q es el número de unidades, y p y $\overline{c}$ se expresan en dólares por unidad

   (a) Determinar el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.
   (b) Determinar el precio en que ocurre la utilidad máxima.
   (c) Determinar la utilidad máxima.

3. Un fabricante ha determinado que para cierto producto, el costo promedio (en dólares por unidad) está dado por

$$\overline{c} = 2q^2 - 36q + 210 - \frac{200}{q}$$

donde $2 \leq q \leq 10$.

   (a) ¿A qué nivel dentro del intervalo $[2, 10]$ debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el costo total mínimo?

   (b) Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo $[5, 10]$, ¿qué valor de q minimizaría el costo total

4. Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = \frac{50}{\sqrt{q}}$$

y la función de costo promedio es

$$\overline{c}\,(q) = 0,50 + \frac{1000}{q}$$

Encuentre el precio y la producción que aumentan al máximo la utilidad. A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

5. Para el producto de un monopolista la función de demanda esta dado por

$$p = 250 - 0.01q$$

donde q es el número de unidades producidas y p es el precio en dolares. La función de costo del fabricante esta dada por $c(q) = 1000 + 25q$ dolares. Determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.

6. Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos. Cada departamento puede rentarse a \$400 por mes. Sin embargo, por cada \$10 mensuales de incremento, habrá dos departamentos vacíos, sin posibilidad de rentarlos. ¿Qué renta por departamento maximizará el ingreso mensual?

7. La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c(x) = x^3 - 22x^2 + 10000x$$

¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

8. Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno \$18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

9. Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$p = q^2 - 100q + 3200$$

y la función de costo promedio del fabricante es

$$\overline{c}\,(q) = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10000}{q}$$

Determine la producción que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad máxima.

10. En los siguientes ejercicios encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado

   (a) $y = x^2 - 2x + 3$ en $[0, 3]$

   (b) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ en $[-1, 0]$

   (c) $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 50$ en $[0, 5]$

   (d) $y = -3x^5 + 5x^3$ en $[-2, 0]$

11. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80 - q}{4}$$

donde q es el número de unidades y p el precio por unidad. ¿Para qué valor de q se tendrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

12. La empresa Vista TV Cable tiene actualmente 100000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$40. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?

Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $f\,(x) = \ln\left(8x^4 + x^2\right)$

2. $f\,(x) = \ln\left(\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}{x^4+1}\right)$

3. $f\,(x) = x^{16} \ln\sqrt{x^2+1}$

4. $g\,(z) = \left[\ln\left(z^4\right)\right]^2 + \left[\ln\left(\dfrac{1}{z^2}\right)\right]^6$

5. $f\,(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$

6. $f\,(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$

7. $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2+4}{x^4+1}\right)$

8. $f(x) = \dfrac{\ln(4x)}{\ln(2x)}$

9. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{(3x+2)^2}{x^4+7}}$

10. $f(t) = \ln\left(\sqrt{5t+1}\,(t^3+4)^6\right)$

11. $f(x) = \ln(x\ln x)$

12. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

13. $f(x) = 7^{\sqrt{x}}$

14. $f(x) = 5^{9x}$

15. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$

16. $f(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{4}}$

17. $f(x) = \log_7(x^2-6x-2)$

18. $f(x) = 3^x\ln(x^6+8)$

19. $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2+4}{x^3\sqrt{x^2+1}}\right)$

20. $f(x) = x^4e^{2x}$

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln x$ en $x = 1$.

2. Encuentre los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 12$ donde la recta tangente es paralela al eje x.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 8x + 6y$ en el punto $(0,0)$.

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2+y^2)^2 = 4y^2$ en el punto $(0,2)$.

5. Encuentre los puntos de la curva $x^2+y^2 = 6x+8y$ donde la recta tangente es horizontal.

6. Encuentre los puntos de la curva

$$\frac{x^2-2x+1}{4} + \frac{y^2-4y+4}{9} = 1$$

donde la recta tangente es horizontal.

7. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln\left(xe^{-x^3}\right)$ en $x = 1$

8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 - xy + y^3 = -1$ en el punto $(1, 0)$.

9. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 + xy - x^2 = 5$ en el punto $(4, 3)$.

10. Encuentre los puntos de la curva $y^2 - 2yx^2 + x^4 = 4$ donde la recta tangente es horizontal.