Primer Parcial - Estadística II (AD)

Dipl.-Math. Natalia Hernández Vargas

Segundo Semestre 2018

Nombre: **Código:**

Antes de empezar, tenga en cuenta lo siguiente:

- Recuerde que ya tiene puntos ganados por las actividades realizadas en clase, intente contestar sin pensar en la calificación final, este examen representa sólo un 25 % de la nota definitiva.
- Justifique todas sus respuestas, no deje nada al supuesto.
- Recuerde dejar por escrito la verificación de las condiciones en cada caso que permiten determinar si se conoce la distribución muestral en cuestión.

Las soluciones son presentadas en cursiva.

Conteste todas las preguntas de este examen con base en la siguiente información:

Cifras sobre el Emprendimiento en Colombia en 2017 Según Confecámaras, la tasa de emprendimiento en Colombia es del 21 %, entendiéndose como emprendimiento el fenómeno de poner en marcha un negocio. Esto quiere decir que el 21 % de todos los colombianos adultos ha iniciado un negocio, o bien, son emprendedores. Asimismo, Confecámaras reporta que el 38 % de todos los adultos en Colombia dicen que el miedo al fracaso no es un obstáculo para iniciar un negocio. La entidad evidenció también que las nuevas empresas de máximo 3 años de existencia de propiedad de estos emprendedores poseen nóminas de empleados por valor de 2,18 millones de pesos en promedio con una desviación estándar de 1,25 millones, mientras que sus inversiones iniciales fueron de 1,25 millones de pesos en promedio con una desviación estándar de 2,18 millones. La distribución de los valores de las nóminas de empleados es normal, así como la distribución de los valores de inversión inicial.

1. Si se escogen 36 colombianos adultos al azar, ¿qué tan probable es que menos del 15 % sean emprendedores?
   *Condiciones: muestra grande ($n \geq 30$), por lo tanto la distribución muestral de la proporción es **normal**. Entonces*

$$\overline{p} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{p}} = p, \sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

   Así que en este caso $\mu_{\overline{p}} = 0,21$ y $\sigma_{\overline{p}} = 0{,}0679$ y la probabilidad es

$$P(\overline{p} < 0,15) = P\left(Z < \frac{0,15 - 0,21}{0{,}0679}\right) = P\left(Z < -0,88\right) = 0,189 = 18,9\,\%$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que menos del 15 % sean emprendedores en una muestra de 36 es de 18,9 %.

2. Si se escogen 36 colombianos adultos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más del 21 % sean emprendedores?
   *Las condiciones son las mismas del punto 1, por lo tanto se sabe que la distribución muestral de la proporción es **normal**. Entonces*

$$\overline{p} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{p}} = 0,21, \sigma_{\overline{p}} = 0,0679\right)$$

   Se quiere saber $P(\overline{p} > 0,21)$, lo que se puede resolver con el método habitual. Sin embargo, no es necesario calcularlo, sabiendo que 0,21 es la media de la distribución muestral en cuestión y por ser normal es a su vez la mediana, por lo tanto $P(\overline{p} > 0,21) = 0,5 = 50\,\%$.

   Por lo tanto, la probabilidad de que más del 21 % sean emprendedores en una muestra de 36 es de 50 %.

3. Si se escogen 36 colombianos adultos al azar, ¿qué tan probable es que entre el 15 % y el 21 % sean emprendedores?
   *Las condiciones son las mismas del punto 1, por lo tanto se sabe que la distribución muestral de la proporción es **normal**. Entonces*

$$\overline{p} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{p}} = 0,21, \sigma_{\overline{p}} = 0,0679\right)$$

   Se quiere saber $P(0,15 \leq \overline{p} \leq 0,21)$, lo que se puede resolver con el método habitual. Sin embargo, el evento en cuestión es el complemento de la unión de los eventos presentados en el punto 1 y punto 2, así que se puede calcular a partir de los resultados de los puntos 1 y 2:

$$P(0,15 \leq \overline{p} \leq 0,21) = 1 - P(\overline{p} < 0,15) - P(\overline{p} > 0,21) = 1 - 0,189 - 0,5 = 0,311 = 31,1\,\%.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que entre el 15 % y el 21 % sean emprendedores en una muestra de 36 es de 31,1 %.

4. Si se eligieran 25 emprendedores colombianos aleatoriamente, ¿qué tan probable es que el valor promedio de sus nóminas de empleados supere los 3 millones de pesos?

   *Condiciones: muestra pequeña ($n < 30$), la población es normal y se conoce la varianza poblacional, por lo tanto la distribución muestral de la media es **normal**. Entonces*
   $$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X}} = \mu, \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$
   Así que en este caso $\mu_{\overline{X}} = 2,18$ y $\sigma_{\overline{X}} = 0,25$ y la probabilidad es

   $$P(\overline{X} > 3) = 1 - P\left(Z > \frac{3 - 2,18}{0,25}\right) = 1 - P\left(Z > 3,28\right) = 1 - 0{,}9995 = 0{,}0005.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el valor promedio de sus nóminas de empleados supere los 3 millones de pesos en una muestra de 25 es de 0,05 %.

5. Si se eligieran 25 emprendedores colombianos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el valor promedio de las nóminas de empleados no supere los 3 millones de pesos?

   *Las condiciones son las mismas del punto 4, por lo tanto se sabe que la distribución muestral de la media es **normal**. Entonces*

   $$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X}} = 2,18, \sigma_{\overline{X}} = 0,25\right).$$

   Se quiere saber $P(\overline{X} < 3)$, lo cual es el complemento del punto 4. Así que la probabilidad de que el valor promedio de las nóminas de empleados no supere los 3 millones de pesos en una muestra de 25 es mayor a 99,95 %.

6. En una muestra aleatoria de 25 emprendedores colombianos, ¿cuál es el error muestral de la varianza de los valores de las nóminas de empleados?

   El error muestral de la varianza es $\sigma_{s^2} = \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}}$ y la desviación estándar poblacional de los valores de las nóminas de empleados es 1,25 millones, así que

   $$\sigma_{s^2} = \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}} = \sqrt{\frac{2(1,25)^4}{25-1}} = 0,451.$$

   Por lo tanto el error muestral de la varianza de los valores de las nóminas de empleados es de 0,451.

7. ¿Cuál es el tamaño mínimo de muestra para garantizar que el error muestral de la varianza de los valores de las nóminas de empleados no supere 0,25?

   Para calcular este tamaño mínimo, es necesario despejar n de la inecuación

$$\sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}} < 0,25,$$

   siendo $\sigma = 1,25$ en este caso. Esto resulta en que $n > 78,187$, por lo tanto el tamaño mínimo de muestra es 79.

8. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor promedio de las inversiones iniciales no supere el millón de pesos en una muestra de 100 emprendedores colombianos?

   Condiciones: muestra grande ($n \geq 30$), la población es normal y se conoce la varianza poblacional, por lo tanto la distribución muestral de la media es ***normal****. Entonces*

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X}} = \mu, \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

   Así que en este caso $\mu_{\overline{X}} = 1,25$ y $\sigma_{\overline{X}} = 0,218$ y la probabilidad es

$$P(\overline{X} < 1) = P\left(Z < \frac{1 - 1,25}{0,218}\right) = P\left(Z < -1,15\right) = 0{,}125 = 12,5\,\%.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el valor promedio de las inversiones iniciales no supere el millón de pesos en una muestra de 100 emprendedores colombianos es de 12,5 %.

9. En una muestra de 100 emprendedores, ¿cuál es la probabilidad de que el valor promedio de inversiones iniciales supere 1,5 millones de pesos?

   Las condiciones son las mismas del punto 8, por lo tanto se sabe que la distribución muestral de la media es ***normal****. Entonces*

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{\overline{X}} = 1,25, \sigma_{\overline{X}} = 0,218\right).$$

   Así que

$$P(\overline{X} > 1,5) = P\left(Z > \frac{1,5 - 1,25}{0,218}\right) = P\left(Z > 1,15\right) = 1 - 0{,}875 = 0{,}125 = 12,5\,\%.$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el valor promedio de las inversiones iniciales supere 1,5 millones de pesos en una muestra de 100 emprendedores colombianos es de 12,5 %.

10. Entre una muestra de tamaño 25 y una de tamaño 50, ¿en cuál de las dos será más probable que la media de inversiones iniciales sea mayor a 2 millones?

    Las probabilidades se pueden calcular de la manera habitual y comparar cuál es mayor, sin embargo, basta con argumentar que a medida que la muestra aumenta de tamaño, el error disminuye. Por lo tanto, será más probable que la media de inversiones sea mayor a 2 millones en una muestra de 25 que en una de 50, considerando este evento como un error al ser la media poblacional 1,25 millones.